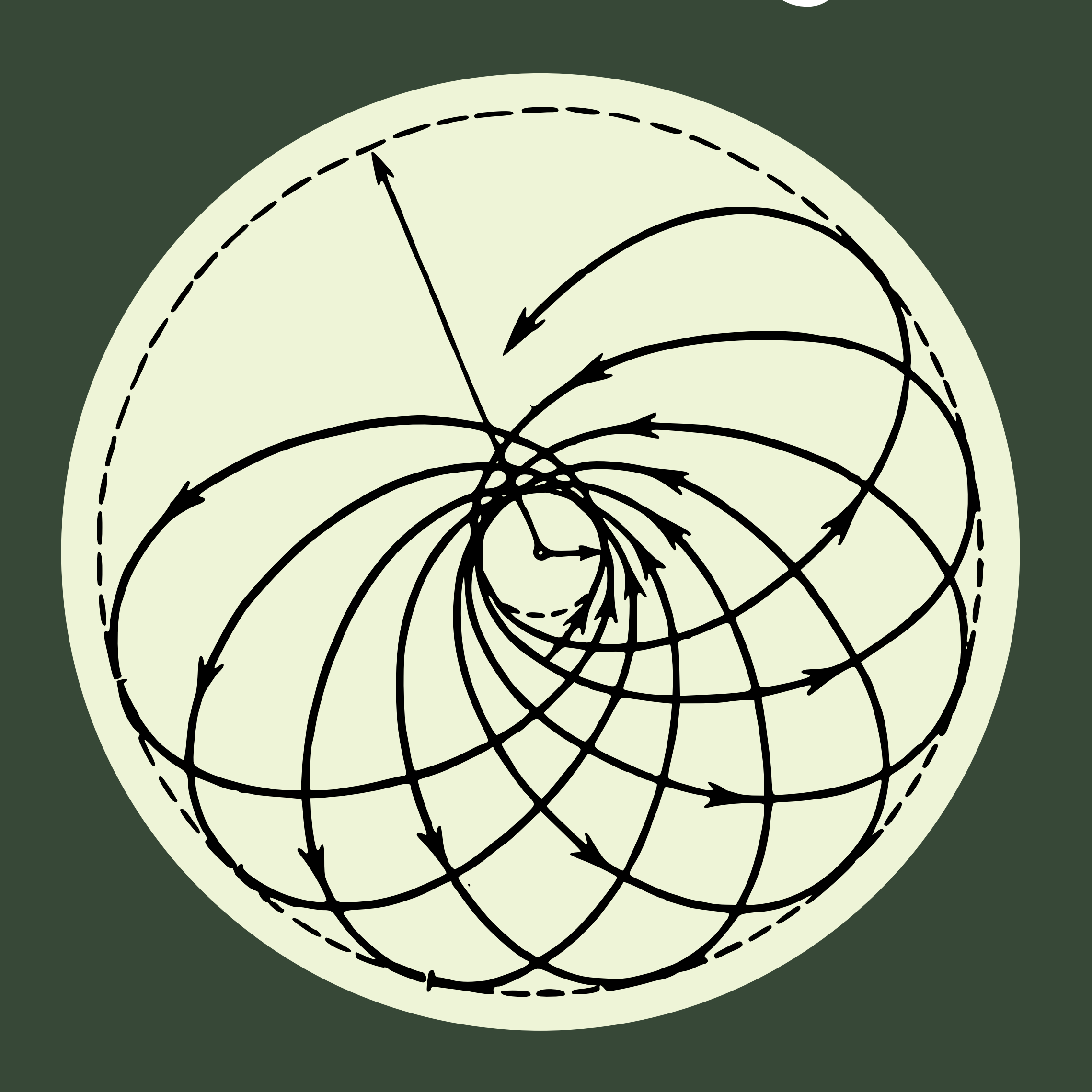
L. Landau, E. Lifchitz

MÉCANIQUE



ÉDITIONS MIR

L. LANDAU ET E. LIFCHITZ

MÉCANIQUE

3e édition revue

ÉDITIONS MIR
MOSCOU 1969

UDC 531/534 (022) = 40

Traduit du russe par
CLAUDE LIGNY

Л. Д. ЛАНДАУ и Е. М. ЛИФШИЦ

МЕХАНИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва

На французском языке

Le présent livre est la traduction du 1er volume du Cours de physique théorique de L. Landau, de l'Académie des Sciences, et de E. Lifchitz, membre correspondant de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.

Le Cours comprendra les tomes suivants:

1. Mécanique
2. Théorie des champs
3. Mécanique quantique (théorie non relativiste)
4. Théorie quantique relativiste
5. Physique statistique
6. Hydrodynamique
7. Théorie de l'élasticité
8. Electrodynamique des milieux continus
9. Cinétique physique.

L'éditeur

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

§ 1. Coordonnées généralisées

Une des notions fondamentales de la Mécanique est celle de *point matériel* [1]. On désigne ainsi un corps dont on peut négliger les dimensions lorsqu'on décrit son mouvement. Bien entendu, cette possibilité dépend des conditions concrètes de tel ou tel problème. Ainsi, on peut considérer les planètes comme des points matériels lorsqu'on étudie leur mouvement autour du Soleil, mais non pas, évidemment, lorsqu'on considère leur rotation diurne.

La position d'un point matériel dans l'espace est déterminée par son rayon vecteur $\mathbf{r}$, dont les composantes coïncident avec ses coordonnées cartésiennes x, y, z. La dérivée de $\mathbf{r}$ par rapport au temps t

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

est appelée vitesse et la dérivée seconde $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$, accélération du point. Par la suite, selon l'habitude admise, nous noterons la dérivation par rapport au temps au moyen d'un point sur la lettre: $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$.

Pour déterminer la position d'un système de N points matériels dans l'espace, il faut se donner N rayons vecteurs, c'est-à-dire $3N$ coordonnées. En général, le nombre des grandeurs indépendantes qu'il faut se donner pour déterminer de façon univoque la position d'un système est appelé nombre de *degrés de liberté* du système. Dans le cas présent, ce nombre est égal à $3N$. Ces grandeurs ne sont pas forcément les coordonnées cartésiennes du point, et selon les conditions du problème, le choix d'un autre système de coordonnées peut être plus commode. s grandeurs quelconques $q_1, q_2, \ldots, q_s$ caractérisant complètement la position d'un système (à s degrés

---

[1] Au lieu du terme « point matériel » nous emploierons souvent le mot « particule ».

de liberté) sont appelées ses *coordonnées généralisées*, et les dérivées $\dot{q}_i$, ses *vitesses généralisées.*

Il ne suffit pas cependant de se donner les coordonnées généralisées pour déterminer « l'état mécanique » du système à un instant donné, en ce sens que cela ne permet pas de prévoir la position du système à l'instant suivant. Pour des valeurs données des coordonnées, un système peut posséder des vitesses arbitraires, et pour les différentes valeurs de celles-ci, la position du système sera différente à l'instant suivant (c'est-à-dire après un intervalle de temps infiniment petit dt).

L'expérience montre que la donnée simultanée des coordonnées et des vitesses détermine complètement l'état du système et permet, en principe, de prédire son mouvement futur. Au point de vue mathématique, cela signifie que la donnée des coordonnées q et des vitesses $\dot{q}$ à un certain instant définit de façon univoque la valeur des accélérations $\ddot{q}$ à cet instant [1].

Les relations qui lient les accélérations aux coordonnées et aux vitesses sont appelées *équations du mouvement.* Par rapport aux fonctions $q(t)$, ce sont des équations différentielles du second ordre dont l'intégration permet en principe de déterminer ces fonctions, c'est-à-dire les trajectoires du mouvement du système mécanique.

§ 2. Le principe de moindre action

La formule la plus générale de la loi du mouvement des systèmes mécaniques est fournie par le *principe* dit *de moindre action* (ou *principe de Hamilton*). Selon ce principe, tout système mécanique est caractérisé par une fonction définie:

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s, t)$$

ou plus brièvement $L(q, \dot{q}, t)$, le mouvement du système satisfaisant à la condition suivante.

Supposons qu'aux instants $t = t_1$ et $t = t_2$ le système occupe des positions déterminées, caractérisées par les deux ensembles de valeurs des coordonnées $q^{(1)}$ et $q^{(2)}$. Entre ces positions, le système se meut alors de telle façon que l'intégrale

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt \tag{2,1}$$

---

[1] Pour simplifier l'écriture, nous désignerons souvent par q l'ensemble de toutes les coordonnées $q_1, q_2, \ldots, q_s$ (et par $\dot{q}$ l'ensemble de toutes les vitesses).

ait la plus petite valeur possible [1]. La fonction L est appelée *fonction de Lagrange* du système, et l'intégrale (2,1) *l'action*.

La fonction de Lagrange ne renferme que q et $\dot{q}$, mais pas les dérivées supérieures $\ddot{q}$, $\dddot{q}$, . . . Cela est dû au fait indiqué plus haut que l'état mécanique d'un système est complètement défini par ses coordonnées et ses vitesses.

Etablissons maintenant les équations différentielles qui déterminent le minimum de l'intégrale (2,1). Pour simplifier l'écriture, admettons d'abord que le système ne possède qu'un seul degré de liberté, de sorte qu'il sera défini par une seule fonction $q\,(t)$.

Soit précisément $q = q\,(t)$ la fonction pour laquelle S a un minimum. Cela signifie que S croît lorsqu'on remplace $q\,(t)$ par toute fonction de forme

$$q\,(t) + \delta q\,(t), \tag{2,2}$$

où $\delta q\,(t)$ est une fonction petite dans tout l'intervalle temporel de t_1 à t_2 (on l'appelle *variation* de la fonction $q\,(t)$). Puisque pour $t = t_1$ et $t = t_2$ toutes les fonctions telles que (2,2) doivent prendre les mêmes valeurs $q^{(1)}$ et $q^{(2)}$ on doit avoir:

$$\delta q\,(t_1) = \delta q\,(t_2) = 0. \tag{2,3}$$

Le changement de valeur de S lorsqu'on remplace q par $q + \delta q$ est donné par la différence :

$$\int_{t_1}^{t_2} L\,(q + \delta q,\ \dot{q} + \delta\dot{q},\ t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} L\,(q,\ \dot{q},\ t)\,dt.$$

Le développement en série de cette différence suivant les puissances de δq et de $\delta\dot{q}$ (dans l'expression sous le signe somme) commence par des termes du premier ordre. La condition nécessaire de minimum [2] de S est que l'ensemble de ces termes s'annule ; on l'appelle première variation (ou habituellement variation tout court) de l'intégrale. Ainsi le principe de moindre action peut être écrit :

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\,(q,\ \dot{q},\ t)\,dt = 0, \tag{2,4}$$

[1] Il convient cependant de noter que le principe de moindre action ainsi formulé n'est pas toujours valable pour la totalité de la trajectoire du mouvement, mais seulement pour chaque partie suffisamment petite de celle-ci; pour toute la trajectoire, l'intégrale (2,1) peut n'avoir qu'un extremum qui ne sera pas nécessairement un minimum. Cette circonstance n'est cependant pas essentielle pour l'établissement des équations du mouvement, qui n'utilise qu'une condition d'extremum.

[2] En général : d'extremum.

soit en effectuant la variation :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0.$$

En remarquant que $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$, intégrons le deuxième terme par parties ; nous obtenons :

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \, dt = 0. \qquad (2,5)$$

En vertu des conditions (2,3), le premier terme de cette expression disparaît. Reste l'intégrale, qui doit être égale à 0 pour toute valeur de δq. Cela n'est possible que si l'expression sous le signe somme s'annule identiquement. Nous obtenons ainsi l'équation

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

S'il y a plusieurs degrés de liberté, les s fonctions différentes $q_i(t)$ doivent varier indépendamment. Il est évident que nous obtenons alors s équations de la forme :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s). \qquad (2,6)$$

Ce sont les équations différentielles cherchées ; on les appelle en mécanique *équations de Lagrange* [1]. Si la fonction de Lagrange d'un système mécanique donné est connue, alors les équations (2,6) établissent la relation entre les accélérations, les vitesses et les coordonnées, autrement dit constituent les équations du mouvement du système.

Au point de vue mathématique, les équations (2,6) forment un système de s équations différentielles du second ordre à s fonctions inconnues $q_i(t)$.

La solution générale d'un tel système contient $2s$ constantes arbitraires. Pour les déterminer, et par là même pour définir complètement le mouvement du système mécanique, il est nécessaire de connaître les conditions initiales qui caractérisent l'état du système à un instant donné, par exemple les valeurs initiales des coordonnées et des vitesses.

---

[1] Dans le Calcul variationnel, qui envisage le problème formel de la détermination des extrema d'intégrales telles que (2, 1), elles sont appelées équations d'Euler.

Soit un système mécanique composé de deux parties A et B, dont chacune, étant fermée, aura respectivement pour fonction de Lagrange les fonctions L_A et L_B. Si alors on éloigne ces parties l'une de l'autre suffisamment pour que leur interaction devienne négligeable, la fonction de Lagrange du système tendra vers la limite

$$\lim L = L_A + L_B. \tag{2,7}$$

Cette additivité de la fonction de Lagrange exprime le fait que les équations du mouvement de chacune des parties d'un système n'interagissant pas avec les autres ne peuvent contenir de grandeurs se rapportant aux autres parties du système.

Il est évident que la multiplication de la fonction de Lagrange d'un système mécanique par une constante arbitraire n'influe pas par elle-même sur les équations du mouvement. On pourrait penser qu'il en résulte une indétermination : les fonctions de Lagrange de différents systèmes mécaniques isolés pourraient être multipliées par des constantes quelconques différentes. La propriété d'additivité de la fonction de Lagrange élimine cette indétermination : elle n'admet que la multiplication simultanée des fonctions de Lagrange de tous les systèmes par une constante unique, ce qui aboutit simplement à un arbitraire naturel dans le choix des unités de mesure de cette grandeur physique ; nous reviendrons là-dessus au § 4.

On peut faire encore la remarque générale suivante. Considérons deux fonctions $L'(q, \dot{q}, t)$ et $L(q, \dot{q}, t)$ ne différant l'une de l'autre que par la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction quelconque des coordonnées et du temps $f(q, t)$:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t). \tag{2,8}$$

Calculées à l'aide de ces deux fonctions, les intégrales (2,1) sont liées par la relation

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt}\, dt =$$
$$= S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1),$$

c'est-à-dire diffèrent l'une de l'autre par un terme supplémentaire qui disparaît lorsqu'on varie l'action. De sorte que la condition $\delta S' = 0$ coïncide avec la condition $\delta S = 0$ et la forme des équations du mouvement reste inchangée.

De cette façon, la fonction de Lagrange n'est déterminée qu'à la dérivée totale d'une fonction quelconque des coordonnées et du temps près.

§ 3. Le principe de relativité de Galilée

Pour étudier les phénomènes mécaniques, il faut choisir un *système de référence*. Dans des systèmes de référence différents les lois du mouvement n'ont pas en général la même forme. Si on prend un système de référence quelconque, il peut se faire que les lois de phénomènes même très simples prennent une forme extrêmement compliquée. Naturellement, on doit choisir un système de référence tel que les lois de la mécanique y soient les plus simples possible.

Par rapport à un système de référence quelconque, l'espace est non homogène et anisotrope. Cela signifie que même si un corps n'interagit avec aucun autre, ses différentes positions dans l'espace et ses différentes orientations ne seront pas équivalentes au point de vue mécanique. Il en sera généralement de même en ce qui concerne le temps, qui sera non uniforme, c'est-à-dire que ses différents instants ne seront pas équivalents. La complication qui serait introduite dans la description des phénomènes mécaniques par ces propriétés de l'espace et du temps est évidente. Ainsi par exemple, un corps libre (c'est-à-dire non soumis à une influence extérieure) ne pourra être au repos: même si la vitesse du corps à un instant quelconque est nulle, à l'instant suivant il commencera à se mouvoir dans une certaine direction. Cependant, on peut toujours trouver un système de référence par rapport auquel l'espace sera homogène et isotrope et le temps uniforme. Un tel système est appelé *galiléen*. En particulier, dans un système galiléen, un corps libre et au repos à un instant donné restera au repos pendant un temps illimité.

Nous pouvons dès maintenant tirer quelques conclusions quant à la forme de la fonction de Lagrange pour un point matériel se déplaçant librement dans un système de référence galiléen. L'uniformité de l'espace et du temps signifie que cette fonction ne peut contenir explicitement ni le rayon vecteur $\mathbf{r}$ du point, ni le temps t; autrement dit, L ne sera fonction que de la vitesse $\mathbf{v}$. Du fait de l'isotropie de l'espace, la fonction de Lagrange ne peut dépendre non plus de la direction du vecteur $\mathbf{v}$, de sorte qu'elle n'est fonction que de sa valeur absolue, c'est-à-dire du carré $\mathbf{v}^2 = v^2$:

$$L = L(v^2). \qquad (3,1)$$

Etant donné que la fonction de Lagrange est indépendante de $\mathbf{r}$ nous avons $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0$, et les équations de Lagrange prennent la forme [1]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

[1] Par dérivée d'une grandeur scalaire par rapport à un vecteur on entend un vecteur dont les composantes sont égales aux dérivées de cette grandeur par rapport aux composantes correspondantes du vecteur.

d'où $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \text{Cte}$. Mais puisque $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$ n'est fonction que de la vitesse, il en résulte que

$$\mathbf{v} = \text{Cte}. \tag{3,2}$$

Nous en arrivons ainsi à la conclusion que dans un système de référence galiléen, tout mouvement libre s'effectue avec une vitesse constante en grandeur et en direction. Cette affirmation constitue ce qu'on appelle la *loi de l'inertie.*

Si, en plus du système galiléen donné, nous faisons intervenir un autre système animé d'un mouvement rectiligne et uniforme par rapport au premier, les lois du mouvement dans ce nouveau système seront les mêmes que dans le système initial. Un mouvement libre s'y effectuera aussi à vitesse constante.

Cependant, l'expérience montre que dans ces systèmes non seulement les lois du mouvement libre seront les mêmes, mais que les systèmes seront aussi totalement équivalents au point de vue mécanique. Ainsi, il existe une infinité de systèmes de référence galiléens animés les uns par rapport aux autres d'un mouvement rectiligne et uniforme. Dans ces systèmes, les propriétés de l'espace et du temps sont les mêmes, ainsi que toutes les lois de la mécanique. Cette affirmation constitue ce qu'on appelle le *principe de relativité de Galilée*, qui est un des principes les plus importants de la Mécanique.

Tout ce que nous avons dit démontre assez clairement le caractère particulier des propriétés des systèmes galiléens, propriétés en vertu desquelles on utilise précisément ces systèmes, en général, pour l'étude des phénomènes mécaniques. Par la suite, nous ne considérerons que des systèmes galiléens, sauf indication contraire.

L'équivalence complète au point de vue mécanique de tous ces systèmes montre en même temps qu'il n'existe aucun système de référence « absolu » que l'on pourrait préférer aux autres.

Les coordonnées $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ d'un même point dans deux systèmes de référence différents K et K' dont le deuxième se déplace par rapport au premier avec une vitesse $\mathbf{V}$, sont liées par la relation

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t. \tag{3,3}$$

On y entend que le temps s'écoule de la même façon dans les deux systèmes de référence :

$$t = t'. \tag{3,4}$$

L'hypothèse d'un temps absolu est à la base même des représentations de la Mécanique classique [1].

---

[1] Elle n'est pas vraie en Mécanique relativiste.

Les formules (3,3) et (3,4) sont appelées *transformations de Galilée*. On peut exprimer le principe de relativité de Galilée comme la nécessité de l'invariance des équations du mouvement par rapport à ces transformations.

§ 4. Fonction de Lagrange d'un point matériel libre

Pour déterminer la forme de la fonction de Lagrange, considérons d'abord le cas le plus simple: le mouvement libre d'un point matériel dans un système galiléen. Comme nous l'avons déjà vu, la fonction de Lagrange ne dépend dans ce cas que du carré du vecteur vitesse. Pour expliciter cette dépendance, nous utiliserons le principe de relativité de Galilée. Si un système de référence galiléen K se déplace par rapport à un autre système galiléen K' avec une vitesse infiniment petite $\boldsymbol{\varepsilon}$, on a $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\varepsilon}$. Puisque les équations du mouvement dans tous les systèmes de référence doivent avoir la même forme, la fonction de Lagrange $L(v^2)$ doit, par cette transformation, se changer en une fonction L', qui, si elle diffère de $L(v^2)$, n'en différera que par la dérivée totale d'une fonction des coordonnées et du temps (voir fin du § 2).

Nous avons

$$L' = L(v'^2) = L(v^2 + 2\mathbf{v}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^2).$$

Développant cette expression en série par rapport aux puissances de $\boldsymbol{\varepsilon}$ et négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, nous obtenons

$$L(v'^2) = L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2} 2\mathbf{v}\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Le deuxième terme du second membre de cette égalité sera une dérivée totale par rapport au temps s'il est fonction linéaire de la vitesse $\mathbf{v}$. Par suite, $\frac{\partial L}{\partial v^2}$ ne dépend pas de la vitesse, c'est-à-dire que la fonction de Lagrange dans le cas envisagé est proportionnelle au carré de la vitesse:

$$L = av^2.$$

Du fait que sous cette forme la fonction de Lagrange satisfait au principe de relativité de Galilée dans le cas d'une transformation infiniment petite de la vitesse, il résulte immédiatement que la fonction de Lagrange est également invariante pour une vitesse finie $\mathbf{V}$ du système de référence K par rapport à K'. En effet,

$$L' = av'^2 = a(\mathbf{v} + \mathbf{V})^2 = av^2 + 2a\mathbf{v}\mathbf{V} + aV^2$$

soit

$$L' = L + \frac{d}{dt}(2a\mathbf{r}\mathbf{V} + aV^2 t).$$

Le second terme est une dérivée totale et peut par conséquent être omis. On désigne habituellement la constante a par $m/2$, de sorte que finalement, la fonction de Lagrange d'un point matériel en mouvement libre s'écrit:

$$L = \frac{mv^2}{2}. \tag{4,1}$$

La grandeur m est appelée *masse* du point matériel. La fonction de Lagrange étant additive, on a, pour un système de points ne réagissant pas les uns sur les autres[1]:

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}. \tag{4,2}$$

Il faut souligner que c'est seulement compte tenu de cette propriété que la définition donnée de la masse acquiert un sens réel. Comme on l'a vu au § 2, on peut toujours multiplier la fonction de Lagrange par une constante quelconque; cela n'affecte pas les équations du mouvement. Pour la fonction (4,2), cette multiplication revient à un changement de l'unité de mesure de la masse; mais les rapports des masses de diverses particules, qui seules ont un sens physique réel, restent inchangés par cette transformation.

Il est aisé de voir que la masse ne peut être négative. En effet, selon le principe de moindre action, lorsqu'un point matériel se déplace d'un point *1* à un point *2* de l'espace, l'intégrale

$$S = \int_1^2 \frac{mv^2}{2} dt$$

passe par un minimum. Supposons que la masse soit négative. Alors, pour une trajectoire le long de laquelle la particule commence par s'éloigner rapidement du point *1* pour se rapprocher ensuite rapidement du point *2*, l'intégrale d'action prendrait des valeurs négatives aussi grandes que l'on veut en valeur absolue. Autrement dit, elle n'aurait pas de minimum[2].

Il est utile de noter que

$$v^2 = \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \frac{dl^2}{dt^2}. \tag{4,3}$$

Par suite, il suffit, pour établir la fonction de Lagrange, de trouver le carré de la longueur de l'élément d'arc dl dans le système de coordonnées correspondant.

[1] Pour numéroter les particules, nous utiliserons comme indices les premières lettres de l'alphabet, et pour les coordonnées, les lettres i, k, l, . . .

[2] La réserve indiquée en note à la p. 9 ne change rien ici, puisque pour $m < < 0$, l'intégrale n'aurait pas non plus de minimum pour aucun élément de trajectoire si petit soit-il.

En coordonnées cartésiennes, par exemple, on a $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, d'où :

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \tag{4,4}$$

En coordonnées cylindriques $dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$, d'où :

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2). \tag{4,5}$$

En coordonnées sphériques $dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$ et :

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\varphi}^2). \tag{4,6}$$

§ 5. Fonction de Lagrange d'un système de points matériels

Considérons maintenant un système de points matériels réagissant les uns sur les autres, mais isolés de tout corps étranger; on dit d'un tel système qu'il est *fermé*. On peut décrire l'interaction des points matériels du système en ajoutant à la fonction de Lagrange (4,2), valable pour les points matériels libres, une fonction définie des coordonnées (dépendante du caractère de l'interaction) [1]. Désignons cette fonction par $-U$, et écrivons :

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots) \tag{5,1}$$

(où $\mathbf{r}_a$ est le rayon vecteur du $a^{\text{ième}}$ point). Nous avons ici la forme générale de la fonction de Lagrange d'un système fermé.

La somme

$$T = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}$$

est appelée *énergie cinétique*, et la fonction U, *énergie potentielle* du système. Le sens de ces termes sera expliqué au § 6.

Le fait que l'énergie potentielle dépend seulement de la distribution des points matériels au même instant, a pour conséquence qu'un changement de position de l'un d'entre eux se répercute instantanément sur tous les autres; on peut dire que l'interaction « se propage » instantanément. Ce caractère des interactions est inévitable en Mécanique classique; cela découle directement des postulats fondamentaux de celle-ci : l'existence d'un temps absolu et le principe de relativité de Galilée. Si l'interaction se propageait non pas instantanément mais avec une vitesse finie, cette dernière

[1] Cette affirmation se rapporte à la Mécanique classique non relativiste exposée dans le présent volume.

ne serait pas la même dans des systèmes de référence différents (se trouvant en mouvement l'un par rapport à l'autre) ; en effet, l'existence d'un temps absolu entraîne automatiquement que la règle habituelle de composition des vitesses est applicable à tous les phénomènes. Mais alors, les lois du mouvement des corps qui interagissent seraient différentes dans différents systèmes de référence (galiléens), ce qui contredirait le principe de relativité.

Au § 3, nous n'avons parlé que de l'uniformité du temps. La forme (5,1) de la fonction de Lagrange montre que le temps n'est pas seulement uniforme, mais aussi isotrope, c'est-à-dire que ses propriétés sont les mêmes dans les deux sens. En effet, le changement de t en $-t$ laisse la fonction de Lagrange, et par suite les équations du mouvement inchangées. En d'autres termes, si dans un système un mouvement quelconque est possible, le mouvement inverse sera toujours possible, c'est-à-dire un mouvement tel que le système passe à nouveau par les mêmes états, dans l'ordre inverse. En ce sens, tout mouvement qui s'effectue selon les lois de la mécanique classique est réversible.

Connaissant la fonction de Lagrange, nous pouvons poser les équations du mouvement

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}=\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}\,. \tag{5,2}$$

Portant (5,1) dans (5,2) nous obtenons

$$m_a\frac{d\mathbf{v}_a}{\partial t}=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}\,. \tag{5,3}$$

Sous cette forme, les équations du mouvement sont appelées *équation de Newton* et constituent la base de la Mécanique d'un système de particules intéragissantes. Le vecteur

$$\mathbf{F}_a=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} \tag{5,4}$$

est appelé *force* agissant sur le $a^{\text{ième}}$ point. De même que l'énergie potentielle U, la force ne dépend que des coordonnées des particules et non de leurs vitesses. Les équations (5,3) montrent alors que les vecteurs accélérations des particules ne sont également fonctions que des coordonnées.

L'énergie potentielle est une grandeur définie seulement à une constante arbitraire près, qui, si on la lui ajoutait, ne changerait pas les équations du mouvement (c'est un cas particulier de la non-uniformité de la fonction de Lagrange indiquée au § 2). La façon la plus naturelle et la plus courante de choisir cette constante consiste à faire en sorte que l'énergie potentielle tende vers zéro lorsque la distance entre les particules augmente.

Si pour décrire un mouvement, on utilise, au lieu des coordonnées cartésiennes des points, des coordonnées généralisées quelconques q_i, il faudra alors, pour obtenir la fonction de Lagrange, effectuer la transformation suivante:

$$x_a = f_a(q_1, q_2, \ldots, q_s), \quad \dot{x}_a = \sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q_k} \dot{q}_k, \text{ etc.}$$

Portant ces expressions dans la fonction

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U,$$

nous obtenons la fonction de Lagrange cherchée sous la forme:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q), \tag{5,5}$$

où les a_{ik} sont fonctions des seules coordonnées. Dans un système de coordonnées généralisées, l'énergie cinétique reste fonction quadratique des vitesses, mais peut dépendre aussi des coordonnées.

Jusqu'à présent, nous n'avons parlé que des systèmes fermés. Considérons maintenant un système A non fermé, interagissant avec un système B animé d'un mouvement donné. On dit dans ce cas que le système A se meut dans un champ extérieur donné (créé par le système B). Puisque les équations du mouvement s'obtiennent à partir du principe de moindre action en variant chacune des coordonnées indépendamment (c'est-à-dire les autres étant considérées comme connues), nous pouvons, pour trouver la fonction de Lagrange L_A du système A, utiliser la fonction de Lagrange L du système entier $A + B$ en y remplaçant les coordonnées q_B par des fonctions données du temps.

En supposant le système $A + B$ fermé, nous avons:

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B),$$

où les deux premiers termes représentent les énergies cinétiques des systèmes A et B, et le troisième, leur énergie potentielle commune. En substituant aux q_B des fonctions données du temps et en laissant de côté le terme $T(q_B(t), \dot{q}_B(t))$, qui ne dépend que du temps (et qui est donc la dérivée totale d'une autre fonction du temps), nous obtenons:

$$L_A = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t)).$$

Ainsi, le mouvement d'un système dans un champ extérieur est décrit par une fonction de Lagrange du type habituel, avec

cette seule différence que l'énergie potentielle peut être maintenant fonction explicite du temps.

Pour le mouvement d'une particule dans un champ extérieur, la forme générale de la fonction de Lagrange sera donc:

$$L=\frac{mv^2}{2}-U(\mathbf{r},\ t) \tag{5,6}$$

et l'équation du mouvement

$$m\dot{\mathbf{v}}=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}. \tag{5,7}$$

On appelle *champ uniforme* un champ en tous les points duquel la même forme **F** agit sur une particule. Dans un champ uniforme, l'énergie potentielle est évidemment:

$$U=-\mathbf{F}\mathbf{r}. \tag{5,8}$$

Pour conclure ce paragraphe, faisons encore une remarque sur l'application des équations de Lagrange à différents problèmes concrets. On a souvent affaire à des systèmes mécaniques où l'interaction des corps (points matériels) a un caractère dit de « *liaison* », c'est-à-dire de limitations imposées à la disposition réciproque des corps. En pratique, on crée ces liaisons en fixant les corps entre eux par des tiges, des fils, des charnières, etc. Cette circonstance introduit dans le mouvement un nouveau facteur: le mouvement des corps s'accompagne de frottement à leurs points de contact; en général, le problème sort alors du cadre de la Mécanique pure (voir § 25). Dans bien des cas cependant, le frottement est suffisamment faible pour qu'on puisse négliger complètement son influence sur le mouvement. Si de plus on peut négliger les masses des « éléments de liaison » du système, le rôle de ceux-ci se réduit alors simplement à une diminution du nombre de degrés de liberté s du système (par rapport au nombre $3N$). Pour déterminer son mouvement, on peut ainsi utiliser à nouveau la forme (5,5) de la fonction de Lagrange, avec un nombre de coordonnées généralisées indépendantes correspondant au nombre réel de degrés de liberté.

Problèmes

Trouver la fonction de Lagrange des systèmes suivants, placés dans un champ de pesanteur uniforme (accélération de la pesanteur : g).

1. Pendule double oscillant dans un plan (fig. 1).

Solution. Comme coordonnées, prenons les angles φ_1 et φ_2 formés par les fils l_1 et l_2 avec la verticale. Nous avons alors pour le point m_1 :

$$T_1=\frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\varphi}_1^2, \quad U=-m_1gl_1\cos\varphi_1.$$

Pour trouver l'énergie cinétique du second point exprimons ses coordonnées cartésiennes x_2, y_2 (origine des coordonnées au point de suspension, axe y dirigé verticalement vers le bas) en fonction de φ_1 et φ_2:

$$x_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2, \qquad y_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2.$$

Nous obtenons alors:

$$T_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2} [l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2].$$

Et finalement :

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) +$$

$$+ (m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 + m_2 g l_2 \cos \varphi_2.$$

2. Pendule plan de masse m_2, dont le point de suspension (de masse m_1) peut se déplacer sur une droite horizontale (fig. 2).

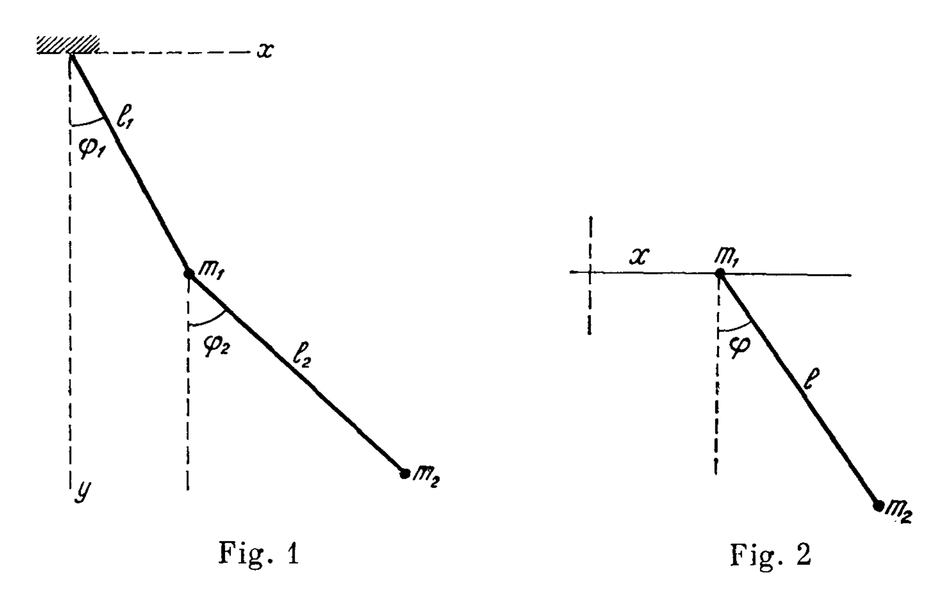


Fig. 1 Fig. 2

Solution. Introduisant la coordonnée x du point m_1 et l'angle φ entre le fil du pendule et la verticale, nous avons :

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi) + m_2 g l \cos \varphi.$$

3. Pendule plan, dont le point de suspension :

a) se déplace uniformément sur un cercle vertical avec une fréquence constante γ (fig. 3) ;

b) effectue des oscillations horizontales de la forme $a \cos \gamma t$;

c) effectue des oscillations verticales de la forme $a \cos \gamma t$.

Solution. a) Coordonnées du point m :

$$x = a \cos \gamma t + l \sin \varphi, \quad y = -a \sin \gamma t + l \cos \varphi.$$

Fonction de Lagrange :

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + m l a \gamma^2 \sin (\varphi - \gamma t) + m g l \cos \varphi \ ;$$

on a omis ici les termes dépendant seulement du temps et éliminé la dérivée totale par rapport au temps de $mal\,\gamma\cos(\varphi-\gamma t)$.

b) Coordonnées du point m :

$$x = a\cos\gamma t + l\sin\varphi, \qquad y = l\cos\varphi.$$

Fonction de Lagrange (dérivées totales exclues) :

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2\cos\gamma t\sin\varphi + mgl\cos\varphi.$$

c) De la même façon :

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2\cos\gamma t\cos\varphi + mgl\cos\varphi.$$

4. Le système représenté sur la fig. 4 ; le point m_2 se déplace sur l'axe vertical, et tout le système tourne avec une vitesse angulaire constante Ω autour de cet axe.

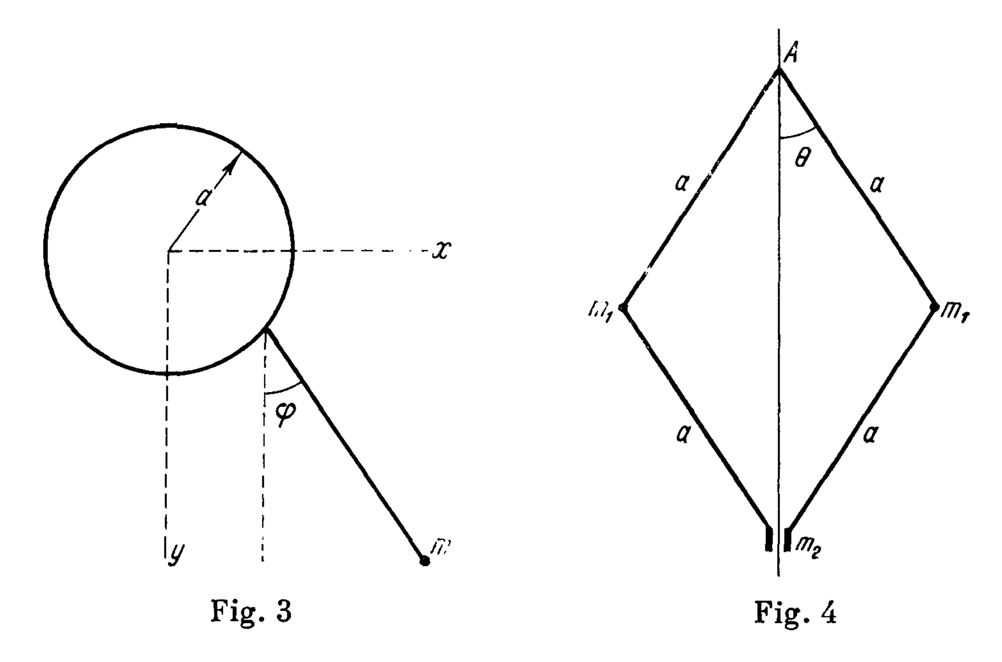


Fig. 3 Fig. 4

Solution. Soit θ l'angle formé par le segment a et la verticale, et φ l'angle de rotation du système autour de l'axe ; $\dot{\varphi} = \Omega$. Pour chacun des points m_1, l'élément de déplacement $dl_1^2 = a^2\,d\theta^2 + a^2\sin^2\theta\,d\varphi^2$. La distance du point m_2 au point de suspension A est égale à $2a\cos\theta$, d'où $dl_2 = -2a\sin\theta\,d\theta$. Fonction de Lagrange :

$$L = m_1a^2(\dot{\theta}^2 + \Omega^2\sin^2\theta) + 2m_2a^2\sin^2\theta\cdot\dot{\theta}^2 + 2ga(m_1+m_2)\cos\theta.$$

CHAPITRE II

LOIS DE CONSERVATION

§ 6. Energie

Lorsqu'un système mécanique est en mouvement, les $2s$ grandeurs q_i et $\dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, s$) qui déterminent son état varient avec le temps. Il existe cependant des fonctions de ces grandeurs qui conservent pendant le mouvement une valeur constante, dépendant seulement des conditions initiales. Ces fonctions sont appelées *intégrales premières* (ou *intégrales du mouvement*).

Pour un système mécanique fermé à s degrés de liberté, le nombre d'intégrales du mouvement indépendantes est égal à $2s - 1$. Des considérations simples le montrent avec évidence. La solution générale des équations du mouvement contient $2s$ constantes arbitraires (voir p. 10). Puisque les équations du mouvement d'un système fermé ne contiennent pas le temps explicitement, le choix de l'origine des temps est arbitraire, et l'une des constantes arbitraires dans la solution des équations peut toujours être choisie sous forme d'une constante additive t_0 du temps. Eliminant $t + t_0$ des $2s$ fonctions

$$= q_i(t + t_0, C_1, C_2, \ldots, C_{2s-1}),$$

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(t + t_0, C_1, C_2, \ldots, C_{2s-1}),$$

nous exprimerons les $2s - 1$ constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots$ $\ldots, C_{2s-1}$ sous la forme de fonctions de q et $\dot{q}$, qui seront des intégrales premières.

Cependant toutes les intégrales premières sont loin de jouer un rôle d'égale importance en Mécanique. Il en est parmi elles dont la constance a une origine très profonde, liée aux propriétés fondamentales de l'espace et du temps, c'est-à-dire à leur uniformité et à leur isotropie. Toutes ces grandeurs qui, comme on dit, sont conservatives, ont une propriété générale importante : elles sont additives, c'est-à-dire que leur valeur pour un système formé de par-

ticules dont on peut négliger l'interaction est égale à la somme de leurs valeurs pour chacune des particules.

Cette additivité confère aux grandeurs correspondantes un rôle spécialement important au point de vue mécanique. Supposons par exemple que deux corps interagissent pendant un certain intervalle de temps. Or, avant comme après l'interaction, chacune des intégrales (additives) de tout le système est égale à la somme de ses valeurs pour les deux corps pris séparément. Par suite, les lois de conservation de ces grandeurs permettent directement de tirer une série de conclusions quant à l'état des corps après l'interaction, si leur état avant l'interaction est connu.

Commençons par la loi de conservation qui découle de *l'uniformité du temps.*

Du fait de cette uniformité, la fonction de Lagrange d'un système fermé ne dépend pas explicitement du temps. Par suite, la dérivée totale par rapport au temps de la fonction de Lagrange peut s'écrire :

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$$

(si L était fonction explicite du temps, il faudrait ajouter le terme $\frac{\partial L}{\partial t}$ au second membre). En remplaçant les dérivées $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ par leurs valeurs $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ obtenues à partir des équations de Lagrange, on obtient :

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i\right)$$

ou :

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = 0.$$

De là, on voit que la grandeur

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \text{Cte} \tag{6,1}$$

reste constante au cours du mouvement du système fermé. Elle constitue donc une de ses intégrales premières. Cette grandeur est appelée *énergie* du système. L'additivité de l'énergie résulte immédiatement de l'additivité de la fonction de Lagrange dont, d'après (6,1), elle est fonction linéaire.

La loi de conservation de l'énergie est valable non seulement pour les systèmes fermés, mais aussi pour les systèmes placés dans

un champ extérieur constant (c'est-à-dire ne dépendant pas du temps) ; en effet, la seule propriété de la fonction de Lagrange que nous avons utilisée dans nos raisonnements, à savoir le fait qu'elle ne dépend pas explicitement du temps, reste valable dans ce cas. Les systèmes mécaniques dont l'énergie se conserve sont parfois appelés *conservatifs*.

Comme on l'a vu au § 5, la fonction de Lagrange d'un système fermé (ou placé dans un champ constant) est de la forme:

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q),$$

où T est fonction du carré des vitesses. Appliquant ici le théorème connu d'Euler sur les fonctions homogènes, nous obtenons:

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T.$$

Portant cette valeur dans (6,1), on trouve:

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q), \tag{6,2}$$

et en coordonnées cartésiennes :

$$E = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots). \tag{6,3}$$

Ainsi, l'énergie d'un système peut être représentée sous la forme d'une somme, dont les deux termes sont essentiellement différents: l'énergie cinétique, dépendant des vitesses, et l'énergie potentielle, dépendant seulement des coordonnées des particules.

§ 7. Impulsion

L'*homogénéité de l'espace* donne lieu à une autre loi de conservation.

Du fait de cette homogénéité, les propriétés mécaniques d'un système fermé ne changent pas lors d'un déplacement parallèle du système entier dans l'espace. Considérons donc un déplacement infiniment petit $\boldsymbol{\varepsilon}$, en imposant la condition que la fonction de Lagrange reste inchangée.

On désigne sous le nom de déplacement parallèle une transformation dans laquelle tous les points du système se déplacent d'un même segment; autrement dit, leurs rayons vecteurs $\mathbf{r}_a \to \mathbf{r}_a + \boldsymbol{\varepsilon}$. La variation de la fonction L pour une variation infiniment petite des coordonnées (les vitesses des particules étant constantes) est donnée par

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \delta \mathbf{r}_a = \boldsymbol{\varepsilon} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a},$$

la sommation étant effectuée pour tous les points matériels du système. ε étant arbitraire, la condition $\delta L = 0$ est équivalente à la condition

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0. \tag{7,1}$$

On a donc, en vertu des équations de Lagrange (5,2):

$$\sum_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = 0.$$

Nous arrivons ainsi à la conclusion que dans un système mécanique fermé la grandeur vectorielle

$$\mathbf{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \tag{7,2}$$

reste inchangée lors du mouvement. Le vecteur $\mathbf{P}$ est appelé *impulsion*[1] du système. La dérivation de la fonction de Lagrange (5,1) montre que l'impulsion s'exprime en fonction des vitesses de point par

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a. \tag{7,3}$$

L'additivité de l'impulsion est évidente. De plus, contrairement à l'énergie, l'impulsion d'un système est égale à la somme des impulsions

$$\mathbf{p}_a = m_a \mathbf{v}_a$$

des différentes particules, que leurs interactions soient ou non négligeables.

La loi de conservation n'est valable pour les trois composantes du vecteur impulsion qu'en l'absence de champ extérieur. Cependant, certaines composantes de l'impulsion peuvent se conserver individuellement dans un champ, si l'énergie potentielle n'y dépend pas de l'une des coordonnées cartésiennes. Lors d'une translation le long de l'axe de coordonnées correspondant, les propriétés mécaniques du système ne changent évidemment pas, et de la même façon, nous voyons que la projection de l'impulsion sur cet axe se conserve. Ainsi, dans un champ uniforme dirigé suivant l'axe des z, il y a conservation des composantes de l'impulsion le long des axes x et y.

L'égalité (7,1) a par elle-même un sens physique simple. La dérivée $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}$ représente la force $\mathbf{F}_a$ agissant sur la $a^{\text{ième}}$

[1] Appelée anciennement quantité de mouvement.

particule. L'égalité (7,1) signifie donc que la somme des forces agissant sur toutes les particules d'un système fermé est égale à 0:

$$\sum_a \mathbf{F}_a = 0. \tag{7,4}$$

En particulier, dans le cas d'un système composé seulement de deux points matériels, $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$: la force exercée sur la première particule par la deuxième est égale, mais opposée à la force exercée sur la deuxième particule par la première. Cette affirmation est connue sous le nom de loi de l'égalité de l'action et de la réaction.

Si le mouvement est décrit à l'aide des coordonnées généralisées q_i, les dérivées de la fonction de Lagrange par rapport aux vitesses généralisées

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{7,5}$$

sont appelées alors *impulsions généralisées* et les dérivées par rapport aux coordonnées généralisées

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{7,6}$$

forces généralisées. Les équations de Lagrange s'écrivent alors:

$$\dot{p}_i = F_i. \tag{7,7}$$

En coordonnées cartésiennes, les impulsions généralisées coïncident avec les composantes des vecteurs $\mathbf{p}_a$. Mais dans le cas général, les grandeurs p_i sont des fonctions linéaires homogènes des vitesses généralisées $\dot{q}_i$, ne se ramenant nullement à des produits d'une masse par une vitesse.

Problème

Une particule de masse m, animée d'une vitesse $\mathbf{v}_1$, passe d'un demi-espace dans lequel son énergie potentielle est constante et égale à U_1, à un demi-espace où cette énergie est aussi constante, mais égale à U_2. Déterminer le changement de direction du mouvement de la particule.

Solution. L'énergie potentielle ne dépend pas des coordonnées le long des axes parallèles à la surface de séparation des deux demi-espaces. Par suite, la projection de l'impulsion de la particule sur cette surface se conserve. Soit $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ les vitesses de la particule avant et après qu'elle ait franchi la surface de séparation, et θ_1 et θ_2 les angles formés par ces vitesses avec la normale à la surface; nous obtenons: $v_1 \sin\theta_1 = v_2 \sin\theta_2$. Mais la relation entre v_1 et v_2 est donnée par la loi de conservation de l'énergie, d'où finalement :

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \sqrt{1 + \frac{2}{mv_1^2}(U_1 - U_2)}\ .$$

§ 8. Centre d'inertie

L'impulsion d'un système mécanique fermé a des valeurs différentes dans différents systèmes de référence (galiléens). Si un système de référence K' se meut par rapport à un autre système K avec une vitesse $\mathbf{V}$, les vitesses $\mathbf{v}'_a$ et $\mathbf{v}_a$ des particules par rapport à ces systèmes sont liées par la relation $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}$. Par suite, la relation entre les valeurs $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}'$ de l'impulsion dans ces systèmes est donnée par la formule

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a = \sum_a m_a \mathbf{v}'_a + \mathbf{V} \sum_a m_a,$$

ou :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \mathbf{V} \sum_a m_a. \tag{8,1}$$

En particulier, il existe toujours un système de référence K' dans lequel l'impulsion totale s'annule. Posant dans (8,1) $\mathbf{P}' = 0$, nous trouvons que la vitesse de ce système de référence est égale à

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{\sum m_a} = \frac{\sum m_a \mathbf{v}_a}{\sum m_a}. \tag{8,2}$$

Si l'impulsion totale d'un système mécanique est nulle, on dit qu'il est au repos par rapport au système de référence correspondant. C'est là une généralisation tout à fait naturelle de la notion de repos pour un point matériel isolé. La vitesse correspondante $\mathbf{V}$, donnée par la formule (8,2), définit alors la vitesse de « mouvement dans son ensemble » d'un système mécanique à impulsion non nulle. Nous voyons ainsi que la loi de conservation de l'impulsion permet de formuler de façon naturelle la notion de repos et de vitesse d'un système mécanique dans son ensemble.

La formule (8,2) montre que la relation entre l'impulsion $\mathbf{P}$ et la vitesse $\mathbf{V}$ d'un système dans son ensemble est la même que la relation entre l'impulsion et la vitesse d'un point matériel de masse $\mu = \sum m_a$ égale à la somme des masses de toutes les particules du système. On peut exprimer ce fait en disant que la *masse est additive.*

Le second membre de la formule (8,2) peut être représenté comme la dérivée totale par rapport au temps de l'expression

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_a \mathbf{r}_a}{\sum m_a}. \tag{8,3}$$

On peut dire que la vitesse d'un système dans son ensemble est la vitesse de déplacement dans l'espace d'un point dont le rayon vecteur est donné par la formule (8,3). Ce point est appelé *centre d'inertie* du système.

On peut formuler la loi de conservation de l'impulsion d'un système fermé en disant que son centre d'inertie est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme. Sous cette forme, c'est une généralisation de la loi de l'inertie, établie au § 3 pour un point matériel libre, dont le « centre d'inertie » coïncide avec le point lui-même.

Lorsque l'on étudie les propriétés mécaniques d'un système fermé, il est naturel d'utiliser pour système de référence celui dans lequel son centre d'inertie est au repos. On se débarrasse par là même du mouvement rectiligne et uniforme du système dans son ensemble, qui, en l'espèce, ne présente pas d'intérêt.

L'énergie d'un système mécanique au repos dans son ensemble est habituellement appelée son énergie interne E_{int}. Elle renferme l'énergie cinétique du mouvement relatif des particules dans le système et l'énergie potentielle de leur interaction. Quant à l'énergie totale d'un système animé dans son ensemble d'une vitesse V, elle peut s'écrire

$$E = \frac{\mu V^2}{2} + E_{\text{int}}. \tag{8,4}$$

Bien que cette formule soit évidente par elle-même, donnons-en une démonstration directe.

Les énergies E et E' d'un système mécanique dans deux systèmes de référence K et K' sont liées par la relation

$$E = \frac{1}{2} \sum_a m_a v_a^2 + U = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\mathbf{v}'_a + \mathbf{V})^2 + U =$$
$$= \frac{\mu V^2}{2} + \mathbf{V} \sum_a m_a \mathbf{v}'_a + \sum_a \frac{m_a v'^2_a}{2} + U$$

ou :

$$E = E' + \mathbf{V}\mathbf{P}' + \frac{\mu V^2}{2}. \tag{8,5}$$

Cette formule définit la loi de transformation de l'énergie lorsqu'on passe d'un système de référence à un autre, de la même façon que, pour l'impulsion, cette loi est donnée par la formule (8,1). Si dans le système K' le centre d'inertie est au repos, alors $\mathbf{P}' = 0$ et $E' = E_{\text{int}}$, et nous retrouvons la formule (8,4).

Problème

Trouver la loi de transformation de l'action lorsqu'on passe d'un système galiléen à un autre.

Solution. La fonction de Lagrange, égale à la différence des énergies cinétique et potentielle, se transforme évidemment selon la formule analogue à (8,5) :

$$L = L' + \mathbf{V}\mathbf{P}' + \frac{1}{2} \mu V^2.$$

Intégrant cette égalité par rapport au temps, on trouve la loi de transformation de l'action :

$$S = S' + \mu \mathbf{V} \mathbf{R}' + \frac{1}{2} \mu V^2 t,$$

$\mathbf{R}'$ étant le rayon vecteur du centre d'inertie dans le système K'.

§ 9. Moment cinétique

Venons-en maintenant à la loi de conservation qui découle de l'*isotropie de l'espace.*

Cette isotropie signifie que les propriétés mécaniques d'un système fermé ne changent pas lors d'une rotation dans l'espace de ce système dans son ensemble. Considérons en effet une rotation infiniment petite du système, et imposons que la fonction de Lagrange reste inchangée.

Nous appellerons vecteur de rotation infiniment petit $\delta\boldsymbol{\varphi}$ le vecteur dont la valeur absolue est égale à l'angle de rotation $\delta\varphi$, et dont la direction coïncide avec l'axe de rotation (de telle sorte que par rapport à la direction de $\delta\boldsymbol{\varphi}$, la rotation s'effectue suivant la règle du tire-bouchon).

Cherchons tout d'abord à quoi est égal l'accroissement du rayon vecteur mené de l'origine commune des coordonnées (placée sur l'axe de rotation) à un point quelconque du système. Le déplacement linéaire de l'extrémité du rayon vecteur est lié à l'angle par la relation

$$|\delta \mathbf{r}| = r \sin\theta \cdot \delta\varphi$$

(fig. 5). Mais la direction du vecteur est perpendiculaire au plan défini par $\mathbf{r}$ et $\delta\boldsymbol{\varphi}$. Par suite, il est clair que

$$\delta \mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}. \tag{9,1}$$

Fig. 5

La rotation du système modifie non seulement la direction des rayons vecteurs, mais aussi les vitesses de toutes les particules, tous les vecteurs se transformant suivant une même loi. L'accroissement de la vitesse par rapport au système de coordonnées immobile est donc

$$\delta \mathbf{v} = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{v}. \tag{9,2}$$

Portons cette expression dans la condition d'invariance de la fonction de Lagrange lors de la rotation :

$$\delta L = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \delta \mathbf{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \delta \mathbf{v}_a \right) = 0,$$

et remplaçons, par définition, les dérivées $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}$ par $\mathbf{p}_a$ et les dérivées $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}$, compte tenu des équations de Lagrange, par $\dot{\mathbf{p}}_a$. Nous obtenons alors :

$$\sum_a (\dot{\mathbf{p}}_a \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_a + \mathbf{p}_a \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{v}_a) = 0,$$

ou, permutant circulairement les facteurs et sortant $\delta\boldsymbol{\varphi}$ de sous le signe somme :

$$\delta\boldsymbol{\varphi} \sum_a (\mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{p}}_a + \mathbf{v}_a \times \mathbf{p}_a) = \delta\boldsymbol{\varphi} \frac{d}{dt} \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a = 0.$$

Puisque $\delta\boldsymbol{\varphi}$ est arbitraire, il en résulte que

$$\frac{d}{dt} \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a = 0,$$

autrement dit nous concluons que lors du mouvement d'un système fermé, il y a conservation de la grandeur vectorielle

$$\mathbf{M} = \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a, \tag{9,3}$$

appelée *moment cinétique* (ou simplement *moment*) du système. L'additivité de cette grandeur est évidente puisque, de même que celle de l'impulsion, elle ne dépend pas du fait qu'il y ait ou non interaction entre les particules.

Nous avons ainsi épuisé les intégrales premières additives. En résumé, un système fermé possède en tout sept intégrales de ce genre : l'énergie, et les trois composantes de chacun des vecteurs impulsion et moment.

Du fait que les rayons vecteurs des particules entrent dans la définition du moment, la valeur de celui-ci dépend en général du choix de l'origine des coordonnées. Les rayons vecteurs $\mathbf{r}_a$ et $\mathbf{r}'_a$ du même point par rapport à des origines placées à une distance $\mathbf{a}$ sont liés par la relation $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \mathbf{a}$. On a par conséquent :

$$\mathbf{M} = \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a = \sum_a \mathbf{r}'_a \times \mathbf{p}_a + \mathbf{a} \times \sum_a \mathbf{p}_a$$

ou :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mathbf{a} \times \mathbf{P}. \tag{9,4}$$

Cette formule montre que c'est seulement dans le cas où le système dans son ensemble est au repos (c'est-à-dire $\mathbf{P} = 0$) que son moment ne dépend pas du choix de l'origine des coordonnées. Il est évident que cette indétermination de sa valeur n'influe pas sur la loi de

conservation du moment puisque, pour un système fermé, l'impulsion se conserve aussi.

Etablissons également la formule qui relie les valeurs du moment cinétique dans deux systèmes de référence galiléens K et K', dont le second est animé par rapport au premier d'une vitesse $\mathbf{V}$. Nous supposerons que les origines des coordonnées dans les systèmes K et K' coïncident à l'instant donné. Les rayons vecteurs des particules dans les deux systèmes sont alors les mêmes, et la relation entre les vitesses est $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}$. Nous avons donc :

$$\mathbf{M} = \sum_a m_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a = \sum_a m_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}'_a + \sum_a m_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{V}.$$

La première somme du second membre est le moment $\mathbf{M}'$ dans le système K' ; introduisant dans la seconde somme le rayon vecteur du centre d'inertie donné par (8,3), on obtient

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mu \mathbf{R} \times \mathbf{V}. \qquad (9,5)$$

Cette formule définit la loi de transformation du moment cinétique lorsqu'on passe d'un système de référence à un autre, de la même façon que, pour l'impulsion et l'énergie, les lois analogues sont données par les formules (8,1) et (8,5).

Si le système de référence K' est celui dans lequel le système mécanique donné est au repos dans son ensemble, $\mathbf{V}$ est alors la vitesse du centre d'inertie de ce système, et $\mu\mathbf{V}$, son impulsion totale $\mathbf{P}$ (par rapport à K). Par suite :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mathbf{R} \times \mathbf{P}. \qquad (9,6)$$

En d'autres termes, le moment cinétique $\mathbf{M}$ d'un système mécanique se compose de son « moment propre » par rapport au système de référence dans lequel il est au repos, et du moment $\mathbf{R} \times \mathbf{P}$ lié au mouvement dont il est animé dans son ensemble.

Bien que la loi de conservation des trois composantes du moment (par rapport à une origine des coordonnées quelconque) ne joue que pour un système fermé, elle peut jouer aussi, sous une forme plus limitée, pour des systèmes placés dans un champ extérieur. Les raisonnements que nous avons faits plus haut montrent avec évidence qu'il y a toujours conservation de la projection du moment sur l'axe par rapport auquel le champ considéré est symétrique ; par suite, les propriétés mécaniques du système ne changent pas lors d'une rotation quelconque autour de cet axe ; bien sûr, le moment doit ici être défini par rapport à un point (origine des coordonnées) situé sur ce même axe.

Le plus important des cas de ce genre est celui d'un champ à symétrie centrale, c'est-à-dire d'un champ dans lequel l'énergie potentielle dépend seulement de la distance à un point déterminé

de l'espace (centre). Il est évident que le mouvement dans un tel champ conserve la projection du moment sur tout axe passant par le centre. En d'autres termes, il y a conservation du vecteur **M** du moment, celui-ci étant défini non par rapport à un point quelconque de l'espace, mais par rapport au centre du champ.

Autre exemple: un champ uniforme le long de l'axe z, dans lequel il y a conservation de la projection M_z du moment, l'origine des coordonnées pouvant être choisie de façon arbitraire.

Remarquons que la projection du moment sur un axe quelconque (appelons-le z) peut être obtenue par dérivation de la fonction de Lagrange, selon la formule

$$M_z = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a}, \tag{9,7}$$

où la coordonnée φ est l'angle de rotation autour de l'axe. Cela ressort clairement de la façon dont nous avons établi la loi de conservation du moment, mais on peut le vérifier par un calcul direct. En coordonnées cylindriques r, φ, z, nous avons (posant $x_a = r_a \cos\varphi_a$, $y_a = r_a \sin\varphi_a$):

$$M_z = \sum_a m_a (x_a \dot{y}_a - y_a \dot{x}_a) = \sum_a m_a r_a^2 \dot{\varphi}_a. \tag{9,8}$$

D'autre part, avec ces variables, la fonction de Lagrange s'écrit

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{r}_a^2 + r_a^2 \dot{\varphi}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U$$

et en la portant dans la formule (9,7), nous retrouvons l'expression (9,8).

Problèmes

1. Trouver les expressions des composantes cartésiennes et de la valeur absolue du moment cinétique d'une particule en coordonnées cylindriques r, φ, z.

Réponse:

$$M_x = m \sin\varphi\, (r\dot{z} - z\dot{r}) - mrz\dot{\varphi} \cos\varphi,$$

$$M_y = m \cos\varphi\, (z\dot{r} - r\dot{z}) - mrz\dot{\varphi} \sin\varphi,$$

$$M_z = mr^2\dot{\varphi},$$

$$M^2 = m^2 r^2 \dot{\varphi}^2 (r^2 + z^2) + m^2 (r\dot{z} - z\dot{r})^2.$$

2. Même question en coordonnées sphériques r, θ, φ.

Réponse:

$$M_x = -mr^2 (\dot{\theta} \sin\varphi + \dot{\varphi} \sin\theta \cos\theta \cos\varphi),$$

$$M_y = mr^2 (\dot{\theta} \cos\varphi - \dot{\varphi} \sin\theta \cos\theta \sin\varphi),$$

$$M_z = mr^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi},$$

$$M^2 = m^2 r^4 (\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2).$$

3. Indiquer les composantes de l'impulsion **P** et du moment **M** qui se conservent lors d'un mouvement dans les champs suivants:

a) Champ d'un plan homogène infini.
Réponse : P_x, P_y, M_z (le plan infini étant le plan x, y).
b) Champ d'un cylindre homogène infini.
Réponse : M_z, P_z (axe du cylindre : z).
c) Champ d'un prisme homogène infini.
Réponse : P_z (arêtes du prisme parallèles à l'axe z).
d) Champ de deux points.
Réponse : M_z (les points sont situés sur l'axe z).
e) Champ d'un demi-plan homogène infini.
Réponse : P_y (le demi-plan infini étant la partie du plan x, y, limitée par l'axe y).
f) Champ d'un cône homogène.
Réponse : M_z (axe du cône : z).
g) Champ d'un tore circulaire homogène.
Réponse : M_z (axe du tore : z).
h) Champ d'une hélice cylindrique homogène infinie.
Solution. La fonction de Lagrange ne change pas lors d'une rotation d'un angle $\delta\varphi$ autour de l'axe de l'hélice (axe z) et d'une translation simultanée le long de cet axe sur une distance $\frac{h}{2\pi}\delta\varphi$ (h pas de l'hélice). Par suite,

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial z}\delta z + \frac{\partial L}{\partial \varphi}\delta\varphi = \left(\dot{P}_z \frac{h}{2\pi} + \dot{M}_z\right)\delta\varphi = 0,$$

d'où

$$M_z + \frac{h}{2\pi} P_z = \text{Cte}.$$

§ 10. Similitude mécanique

La multiplication de la fonction de Lagrange par un facteur constant quelconque ne change évidemment pas les équations du mouvement. Grâce à cette circonstance (déjà notée au § 2) il est possible, dans de nombreux cas importants, de tirer plusieurs conclusions quant aux propriétés du mouvement, sans intégrer concrètement les équations.

C'est le cas par exemple lorsque l'énergie potentielle est une fonction homogène des coordonnées, c'est-à-dire une fonction satisfaisant à la condition

$$U(\alpha\mathbf{r}_1, \alpha\mathbf{r}_2, \ldots, \alpha\mathbf{r}_n) = \alpha^k U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n), \tag{10,1}$$

où α est une constante quelconque, et le nombre k le degré d'homogénéité de la fonction.

Effectuons la transformation par laquelle, lorsque les coordonnées varient α fois, le temps varie simultanément (β fois):

$$\mathbf{r}_a \to \alpha\mathbf{r}_a, \quad t \to \beta t.$$

Toutes les vitesses $\mathbf{v}_a = \frac{d\mathbf{r}_a}{dt}$ varient alors α/β fois, et l'énergie cinétique α^2/β^2 fois. L'énergie potentielle est multipliée par α^k. Si α et β sont liés par la condition

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k, \text{ c'est-à-dire } \beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}},$$

alors, par cette transformation, la fonction de Lagrange tout entière est multipliée par le facteur constant α^k, c'est-à-dire que les équations du mouvement restent inchangées.

Faire varier un même nombre de fois toutes les coordonnées des particules signifie passer de certaines trajectoires à d'autres, géométriquement semblables aux premières, et n'en différant que par leurs dimensions linéaires. Nous sommes amenés ainsi à la conclusion suivante: si l'énergie potentielle d'un système est une fonction homogène du $k^{\text{ième}}$ degré des coordonnées (cartésiennes), les équations du mouvement admettent des trajectoires géométriquement semblables; tous les temps du mouvement (entre les points correspondants des trajectoires) sont alors dans le rapport

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{k}{2}}, \tag{10,2}$$

où l'/l est le rapport des dimensions linéaires de deux trajectoires. Comme les temps, les valeurs des diverses grandeurs mécaniques aux points correspondants des trajectoires et aux instants correspondants sont aussi des puissances déterminées du rapport l'/l. Ainsi, pour les vitesses, les énergies et les moments, on a:

$$\frac{v'}{v} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{k}{2}}, \quad \frac{E'}{E} = \left(\frac{l'}{l}\right)^k, \quad \frac{M'}{M} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+\frac{k}{2}}. \tag{10,3}$$

Prenons quelques exemples.

Comme nous le verrons plus loin, dans le cas des petites oscillations, l'énergie potentielle est une fonction quadratique des coordonnées ($k = 2$). La formule (10,2) montre que la période de ces oscillations ne dépend pas de leur amplitude.

Dans un champ de forces homogène l'énergie potentielle est une fonction linéaire des coordonnées [voir (5,8)], c'est-à-dire $k = 1$. De (10,2) on tire

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{l'}{l}}.$$

Il s'ensuit par exemple que pour la chute d'un corps dans un champ de pesanteur, les carrés des temps de chute sont dans le même rapport que les hauteurs initiales.

Lors de l'attraction newtonienne de deux masses, ou de l'interaction coulombienne de deux charges, l'énergie potentielle est inversement proportionnelle à la distance entre les particules; autrement dit, elle est une fonction homogène de degré $k = -1$. Dans ces cas:

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{3/2},$$

et nous pouvons dire par exemple que les carrés des temps de révolution de corps sur leurs orbites sont proportionnels aux cubes des dimensions de celles-ci (*troisième loi de Kepler*).

Si le mouvement d'un système dont l'énergie potentielle est une fonction homogène des coordonnées s'effectue dans une région limitée de l'espace, il existe une relation très simple entre les valeurs moyennes dans le temps des énergies potentielle et cinétique; cette relation est connue sous le nom de *théorème du viriel.*

Puisque l'énergie cinétique T est une fonction quadratique des vitesses, on a d'après le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes:

$$\sum_a \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_a} \mathbf{v}_a = 2T,$$

ou, en introduisant les impulsions $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_a} = \mathbf{p}_a$:

$$2T = \sum_a \mathbf{p}_a \mathbf{v}_a = \frac{d}{dt}\left(\sum_a \mathbf{p}_a \mathbf{r}_a\right) - \sum_a \mathbf{r}_a \dot{\mathbf{p}}_a. \tag{10,4}$$

Prenons la moyenne de cette égalité dans le temps. On appelle valeur moyenne d'une fonction quelconque du temps $f(t)$ la grandeur

$$\bar{f} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t)\, dt.$$

Il est facile de voir que si $f(t)$ est la dérivée par rapport au temps $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$ d'une fonction $F(t)$ bornée (c'est-à-dire ne prenant pas de valeurs infinies), sa valeur moyenne s'annule. En effet,

$$\bar{f} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dF}{dt}\, dt = \lim_{\tau\to\infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0.$$

Supposons qu'un système soit en mouvement dans une région finie de l'espace, avec des vitesses ne tendant pas vers l'infini. Alors la grandeur $\sum_a \mathbf{r}_a \mathbf{p}_a$ est bornée, et la valeur moyenne du pre-

mier terme du second membre de l'égalité (10,4) s'annule. Remplaçant par ailleurs, conformément aux équations de Newton, $\dot{\mathbf{p}}_a$ par $-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}$, nous obtenons [1]

$$2\overline{T} = \overline{\sum_a \mathbf{r}_a \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}}. \tag{10,5}$$

Si l'énergie potentielle est une fonction homogène du $k^{\text{ième}}$ degré de tous les rayons vecteurs $\mathbf{r}_a$, l'égalité (10,5) donne d'après le théorème d'Euler la relation cherchée:

$$2\overline{T} = k\overline{U}. \tag{10,6}$$

Puisque $\overline{T}+\overline{U}=\overline{E}=E$, on peut écrire la relation (10,6) sous les formes équivalentes

$$\overline{U} = \frac{2}{k+2}E, \quad \overline{T} = \frac{k}{k+2}E, \tag{10,7}$$

où $\overline{U}$ et $\overline{T}$ sont exprimés en fonction de l'énergie totale du système.

En particulier, pour des petites oscillations ($k=2$), nous avons

$$\overline{T} = \overline{U},$$

c'est-à-dire que les valeurs moyennes des énergies potentielle et cinétique coïncident. Pour l'interaction newtonienne ($k=-1$):

$$2\overline{T} = -\overline{U}.$$

Ici $E = -\overline{T}$, ce qui correspond au fait que pour ce genre d'interaction, le mouvement ne s'effectue dans une région finie de l'espace que lorsque l'énergie totale est négative (voir § 15).

Problèmes

1. Deux points de masses différentes et de même énergie potentielle se déplacent sur des trajectoires identiques; trouver le rapport des temps.

Réponse :

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{m'}{m}}.$$

2. Trouver les valeurs des temps pour un mouvement sur des trajectoires identiques lorsqu'on multiplie l'énergie potentielle par un facteur constant.

Réponse :

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{U}{U'}}.$$

---

[1] L'expression du second membre de (10,5) est parfois appelée viriel du système.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

§ 11. Mouvement linéaire

Le mouvement d'un système à un degré de liberté est dit linéaire. La forme la plus générale de la fonction de Lagrange d'un tel système, placé dans des conditions extérieures constantes, est:

$$L=\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2-U(q), \tag{11,1}$$

où $a(q)$ est une fonction de la coordonnée généralisée q. En particulier si q est une coordonnée cartésienne (appelons-la x)

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-U(x). \tag{11,2}$$

Les équations du mouvement correspondant à ces fonctions de Lagrange s'intègrent sous leur forme générale. Il n'est même pas nécessaire d'écrire l'équation du mouvement elle-même, il suffit de partir de son intégrale première, c'est-à-dire de l'équation qui exprime la loi de conservation de l'énergie. Ainsi, pour la fonction de Lagrange (11,2), nous avons:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2}+U(x)=E.$$

C'est une équation différentielle du premier ordre qui s'intègre par séparation des variables. On a:

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]},$$

d'où

$$t=\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}+\text{Cte}. \tag{11,3}$$

Les deux constantes arbitraires de la solution de l'équation du mouvement sont représentées ici par l'énergie totale E et la constante d'intégration Cte.

Puisque l'énergie cinétique est une grandeur essentiellement positive, lors du mouvement l'énergie totale est toujours supérieure à l'énergie potentielle, c'est-à-dire que le mouvement ne peut s'effectuer que dans les régions de l'espace où $U(x) < E$.

Supposons, par exemple, que la fonction $U(x)$ a la forme représentée sur la fig. 6. Si nous menons une droite horizontale qui correspond à la valeur donnée de l'énergie totale, nous voyons tout

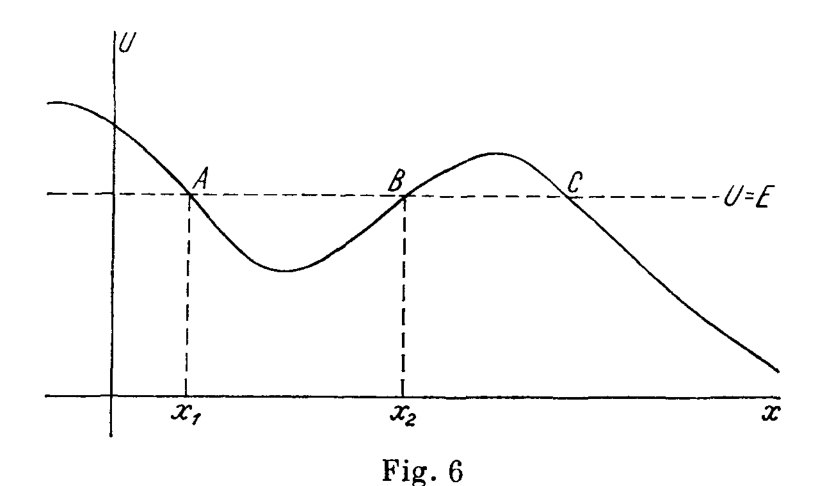


Fig. 6

de suite quels sont les domaines possibles du mouvement. Ainsi, dans le cas de la fig. 6, le mouvement ne peut s'effectuer que dans la région AB ou dans la région située à droite de C.

Les points où l'énergie potentielle est égale à l'énergie totale

$$U(x) = E \tag{11,4}$$

déterminent les limites du mouvement. Ce sont des « *points d'arrêt* » puisque la vitesse s'y annule. Si le domaine du mouvement est limité par deux de ces points, le mouvement s'effectue dans une région limitée de l'espace ; on dit alors qu'il est *fini*. Mais si le domaine du mouvement est illimité ou limité seulement d'un côté, le mouvement est dit *infini*, la particule s'éloigne à l'infini.

Un mouvement linéaire fini est dit oscillatoire : la particule effectue un mouvement qui se répète périodiquement entre deux limites (sur la fig. 6, dans la « *cuvette de potentiel* » AB entre les points x_1 et x_2). Compte tenu de la propriété générale de réversibilité (p. 16-17), le temps mis pour aller de x_1 à x_2 est égal au temps mis pour retourner de x_2 à x_1. Par suite, la période des oscillations T, c'est-à-dire le temps pendant lequel le point va de x_1 à x_2 et retour, est égale au double du temps nécessaire pour parcourir le segment

x_1x_2, soit d'après (11,3)

$$T(E)=\sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}, \tag{11,5}$$

où les limites x_1 et x_2 sont les racines de l'équation (11,4) pour la valeur donnée de E. Cette formule détermine la période du mouvement en fonction de l'énergie totale de la particule.

Problèmes

1. Déterminer la période des oscillations d'un pendule mathématique plan (point m à l'extrémité d'un fil de longueur l dans un champ de pesanteur) en fonction de leur amplitude.

Solution. Energie du pendule:

$$E=\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}-mgl\cos\varphi=-mgl\cos\varphi_0,$$

où φ est l'angle dont le fil s'écarte de la verticale, et φ_0 l'angle d'écart maximum. Calculant la période comme le quadruple du temps mis pour aller de 0 à φ_0, nous trouvons :

$$T=4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}=2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

Posant $\sin\frac{\varphi}{2}\Big/\sin\frac{\varphi_0}{2}=\sin\xi$, cette intégrale devient

$$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}K\left(\frac{\sin\varphi_0}{2}\right),$$

où

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}$$

qui est une intégrale elliptique complète de première espèce. Si $\sin\frac{\varphi_0}{2}\simeq\frac{\varphi_0}{2}\ll 1$ (petites oscillations) le développement de la fonction $K(k)$ donne :

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{16}\varphi_0^2+\dots\right).$$

Le premier terme de ce développement correspond à une formule élémentaire connue.

2. Déterminer la période des oscillations en fonction de l'énergie, lors du mouvement d'une particule de masse m dans un champ où l'énergie potentielle est :

a) $U = A\,|x|^n$.
Réponse :

$$T = 2\sqrt{2m}\int_0^{(E/A)^{1/n}} \frac{dx}{\sqrt{E-Ax^n}} = \frac{2\sqrt{2m}\,E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}}{A^{1/n}}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^n}}.$$

Posant $y^n = u$, l'intégrale se ramène à une intégrale eulérienne B, qui s'exprime à l'aide des fonctions Γ:

$$T = \frac{2\sqrt{2\pi m}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{nA^{1/n}\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)} E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}.$$

La relation entre T et E correspond à la loi de similitude mécanique (10,2) et (10,3).

b) $U = -\dfrac{U_0}{\mathrm{ch}^2\,\alpha x}$, $\quad -U_0 < E < 0$.

Réponse :

$$T = \frac{\pi\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{|E|}}.$$

c) $U = U_0\,\mathrm{tg}^2\,\alpha x$.
Réponse :

$$T = \frac{\pi\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{E+U_0}}.$$

§ 12. Définition de l'énergie potentielle en fonction de la période des oscillations

Considérons la question suivante: dans quelle mesure peut-on retrouver l'énergie potentielle $U(x)$ d'un champ dans lequel une particule est animée d'un mouvement oscillatoire, la période T de ce mouvement étant une fonction connue de l'énergie E. Au point de vue mathématique il s'agit de résoudre l'équation intégrale (11,5), dans laquelle $U(x)$ est considérée comme fonction inconnue, et $T(E)$ comme fonction connue.

Nous supposerons tout d'abord que la fonction cherchée $U(x)$ n'a, dans la région de l'espace considérée, qu'un seul minimum, laissant de côté la question de savoir s'il peut exister des solutions de l'équation intégrale ne satisfaisant pas à cette condition. Pour simplifier, choisissons pour origine des coordonnées le minimum de l'énergie potentielle et posons la valeur de celle-ci en ce point égale à zéro (fig. 7).

Transformons l'intégrale (11,5) en considérant la coordonnée x comme une fonction de U. La fonction $x(U)$ n'est pas uniforme: à chaque valeur de l'énergie potentielle correspondent deux valeurs

différentes de x. Par conséquent, l'intégrale (11,5), dans laquelle nous remplaçons dx par $\frac{dx}{dU}\,dU$, devient une somme de deux intégrales: de $x = x_1$ à $x = 0$ et de $x = 0$ à $x = x_2$; nous désignerons

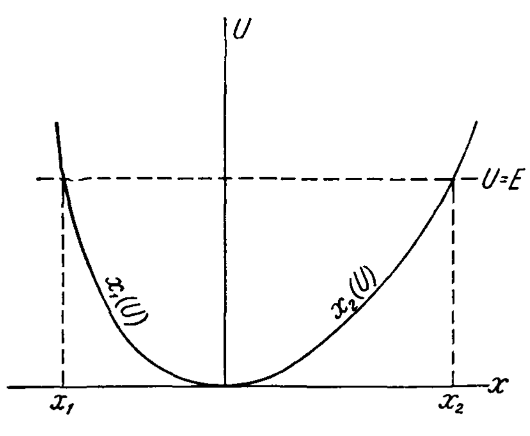


Fig. 7

la dépendance de x par rapport à U dans ces deux domaines respectivement par $x = x_1(U)$ et $x = x_2(U)$.

Les limites d'intégration par rapport à dU seront évidemment E et 0, de sorte qu'on a

$$T(E) = \sqrt{2m}\int_0^E \frac{dx_2(U)}{dU}\frac{dU}{\sqrt{E-U}} + \sqrt{2m}\int_E^0 \frac{dx_1(U)}{dU}\frac{dU}{\sqrt{E-U}} =$$

$$= \sqrt{2m}\int_0^E \left[\frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU}\right]\frac{dU}{\sqrt{E-U}}\,.$$

Divisons les deux membres de cette égalité par $\sqrt{\alpha - E}$, où α est un paramètre, et intégrons par rapport à E de 0 à α:

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{\alpha-E}} = \sqrt{2m}\int_0^\alpha\int_0^E \left[\frac{dx_2(U)}{dU} - \frac{dx_1(U)}{dU}\right]\frac{dU\,dE}{\sqrt{(\alpha-E)(E-U)}}\,,$$

soit, en changeant l'ordre des intégrations:

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{\alpha-E}} = \sqrt{2m}\int_0^\alpha \left[\frac{dx_2(U)}{dU} - \frac{dx_1(U)}{dU}\right]dU\int_U^\alpha \frac{dE}{\sqrt{(\alpha-E)(E-U)}}\,.$$

Le calcul de l'intégrale par rapport à dE est élémentaire: elle est égale à π. L'intégration par rapport à dU est alors triviale et donne:

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{\alpha-E}} = \pi\sqrt{2m}\,[x_2(\alpha) - x_1(\alpha)]$$

(on a tenu compte que $x_2(0) = x_1(0) = 0$). Remplaçant maintenant α par U on trouve finalement

$$x_2(U) - x_1(U) = \frac{1}{\pi\sqrt{2m}} \int_0^U \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{U-E}}. \tag{12,1}$$

Ainsi, à partir de la fonction connue $T(E)$, on détermine la différence $x_2(U) - x_1(U)$. Les fonctions $x_2(U)$ et $x_1(U)$ elles-mêmes restent indéterminées. Cela signifie qu'il existe une infinité de courbes $U = U(x)$ qui conduisent à la relation donnée entre la période et l'énergie, et qui diffèrent les unes des autres par des déformations qui ne changent pas la différence entre les deux valeurs de x correspondant à une même valeur de U.

La multiplicité des solutions disparaît si l'on pose pour condition que la courbe $U = U(x)$ soit symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, c'est-à-dire que l'on ait :

$$x_2(U) = -x_1(U) \equiv x(U).$$

Dans ce cas la formule (12,1) donne pour $x(U)$ une expression univoque :

$$x(U) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^U \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{U-E}}. \tag{12,2}$$

§ 13. Masse réduite

Le problème très important du mouvement d'un système composé de deux particules réagissant l'une sur l'autre (« *problème des deux corps* ») admet une solution générale complète.

Pour résoudre ce problème nous allons tout d'abord montrer qu'on peut le simplifier considérablement, en décomposant le mouvement du système en deux mouvements : celui du centre d'inertie, et celui des points par rapport à ce dernier.

L'énergie potentielle d'interaction de deux particules dépend uniquement de la distance entre elles, c'est-à-dire de la valeur absolue de la différence entre leurs rayons vecteurs. D'où la fonction de Lagrange du système :

$$L = \frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \tag{13,1}$$

Soit

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

le vecteur de la distance qui sépare les deux points, et plaçons l'origine des coordonnées au centre d'inertie, ce qui donne

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0.$$

Des deux dernières égalités on tire

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r}. \tag{13,2}$$

Portant ces expressions dans (13,1) on a :

$$L = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - U(r), \tag{13,3}$$

où

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \tag{13,4}$$

désigne une grandeur appelée *masse réduite*. La fonction (13,3) coïncide formellement avec la fonction de Lagrange d'un point matériel de masse m en mouvement dans un champ extérieur $U(r)$ symétrique par rapport à l'origine immobile des coordonnées.

De cette façon le problème du mouvement de deux points matériels qui réagissent l'un sur l'autre se ramène à celui du mouvement d'un point dans un champ extérieur donné $U(r)$. Pour la solution $= \mathbf{r}(t)$ de ce problème, les trajectoires $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$ et $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$ de chacune des particules m_1 et m_2 prises séparément (par rapport à leur centre d'inertie commun) s'obtiennent d'après les formules (13,2).

Problème

Un système est composé d'une particule de masse M et de n particules de même masse m. Eliminer le mouvement du centre d'inertie et ramener le problème à celui du mouvement des n particules.

Solution. Soit $\mathbf{R}$ le rayon vecteur de la particule M et $\mathbf{R}_a$ $(a = 1, 2, \ldots, n)$ les rayons vecteurs des particules de masse m. Introduisons les distances de la particule M aux particules m :

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{R}_a - \mathbf{R}$$

et plaçons l'origine des coordonnées au centre d'inertie:

$$M\mathbf{R} + m\sum_a \mathbf{R}_a = 0.$$

De ces égalités on tire :

$$\mathbf{R} = -\frac{m}{M+nm}\sum_a \mathbf{r}_a, \quad \mathbf{R}_a = \mathbf{R} + \mathbf{r}_a.$$

Substituant ces expressions dans la fonction de Lagrange

$$L = \frac{M\dot{\mathbf{R}}^2}{2} + \frac{m}{2}\sum \dot{\mathbf{R}}_a^2 - U.$$

nous obtenons :

$$L=\frac{m}{2}\sum_a \dot{\mathbf{r}}_a^2-\frac{m^2}{2(M+nm)}\left(\sum_a \dot{\mathbf{r}}_a\right)^2-U.$$

L'énergie potentielle ne dépend que des distances entre les particules et peut donc être représentée comme une fonction des vecteurs $\mathbf{r}_a$.

§ 14. Mouvement dans un champ central

En ramenant le problème du mouvement de deux corps à celui d'un seul, nous avons été conduits à la question suivante : déterminer le mouvement d'une particule dans un champ extérieur où son énergie potentielle dépend seulement de la distance r à un point immobile donné ; un tel champ est dit *central*. La force

$$\mathbf{F}=-\frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}}=-\frac{dU}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r},$$

agissant sur la particule ne dépend elle aussi, en valeur absolue, que de r, et est en chaque point dirigée suivant le rayon vecteur.

Comme on l'a vu au § 9, un mouvement dans un champ central conserve le moment du système par rapport au centre du champ. Pour une particule ce moment est

$$\mathbf{M}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}.$$

Puisque les vecteurs $\mathbf{M}$ et $\mathbf{r}$ sont perpendiculaires entre eux, la constance de $\mathbf{M}$ signifie que pendant tout le mouvement de la particule son rayon vecteur reste dans un même plan, perpendiculaire à $\mathbf{M}$.

Ainsi, la trajectoire du mouvement d'une particule dans un champ central est contenue tout entière dans un plan. Introduisant les coordonnées polaires r, φ, écrivons la fonction de Lagrange sous la forme (cf. (4,5)) :

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-U(r). \tag{14,1}$$

Cette fonction ne contient pas de façon explicite la coordonnée φ. On appelle coordonnée *cyclique* [1] toute coordonnée généralisée q_i, qui n'entre pas explicitement dans la fonction de Lagrange. L'équation de Lagrange donne pour cette coordonnée :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,$$

c'est-à-dire que l'impulsion généralisée qui lui correspond $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$ constitue une intégrale première. De ce fait, lorsqu'il

[1] Ou *secondaire* : les autres paramètres sont dits *principaux* (*N. d. T*).

existe des coordonnées cycliques, le problème de l'intégration des équations du mouvement se trouve considérablement simplifié.

Dans le cas envisagé l'impulsion généralisée

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$$

coïncide avec le moment $M_z = M$ (voir (9,6)), de sorte que nous retrouvons la loi de conservation du moment que nous connaissons déjà

$$M = mr^2\dot{\varphi} = \text{Cte}. \qquad (14,2)$$

Remarquons que pour le mouvement plan d'une particule dans un champ central, cette loi admet une interprétation géométrique

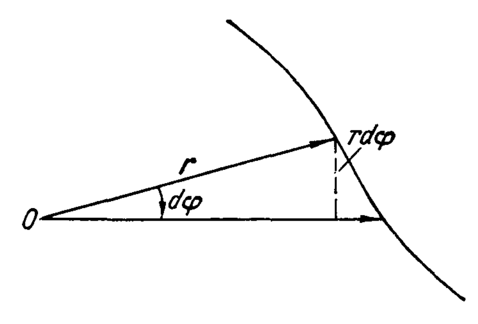


Fig. 8

simple. L'expression $\frac{1}{2} r \cdot r\, d\varphi$ se présente comme l'aire du secteur formé par les deux rayons vecteurs infiniment voisins et l'élément d'arc de la trajectoire (fig. 8). En désignant cette surface par df, nous écrirons le moment de la particule

$$M = 2m\dot{f}, \qquad (14,3)$$

où la dérivée $\dot{f}$ est appelée *vitesse aréolaire*. La conservation du moment entraîne donc la constance de la vitesse aréolaire: pendant des intervalles de temps égaux le rayon vecteur d'un point mobile balaye des aires égales (*seconde loi de Kepler* [1]).

Le plus simple pour obtenir la solution complète du problème du mouvement d'une particule dans un champ central est de partir des lois de conservation de l'énergie et du moment, sans écrire les équations du mouvement elles-mêmes. En exprimant $\dot{\varphi}$ en fonction de M d'après (14,2) et portant cette valeur dans l'expression

[1] On appelle quelquefois *intégrale des aires* la loi de conservation du moment pour une particule en mouvement dans un champ central.

de l'énergie, nous obtenons:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r). \qquad (14,4)$$

D'où

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}} \qquad (14,5)$$

soit, en séparant les variables et intégrant:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + \text{Cte.} \qquad (14,6)$$

Ecrivons ensuite (14,2) sous la forme

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2}dt,$$

exprimons dt d'après (14,5) et intégrons; il vient:

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} + \text{Cte.} \qquad (14,7)$$

Les formules (14,6) et (14,7) donnent la solution générale du problème posé. La seconde définit la relation entre r et φ, c'est-à-dire l'équation de la trajectoire. La formule (14,6), elle, détermine de façon implicite la distance r du point mobile au centre en fonction du temps. Remarquons que l'angle φ varie toujours avec le temps de façon monotone: d'après (14,2) il est clair en effet que $\dot{\varphi}$ ne change jamais de signe.

L'expression (14,4) montre qu'on peut considérer la partie radiale du mouvement comme un mouvement linéaire dans un champ doué d'une énergie potentielle « efficace »

$$U_{\text{eff}} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \qquad (14,8)$$

La grandeur $M^2/2mr^2$ est l'énergie centrifuge. Les valeurs de r pour lesquelles

$$U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E \qquad (14,9)$$

déterminent les limites du domaine du mouvement suivant la distance au centre. Lorsque l'égalité (14,9) a lieu la vitesse $\dot{r}$ s'annule. Cela ne signifie pas que la particule s'arrête (comme pour un mou-

vement linéaire véritable), puisque la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ ne s'annule pas. L'égalité $\dot{r} = 0$ désigne un « point de rebroussement » de la trajectoire, où la fonction $r(t)$ de croissante devient décroissante, ou inversement.

Si le domaine de variation possible de r est limité par la seule condition $r \geqslant r_{\min}$, le mouvement de la particule est infini : sa trajectoire commence à l'infini et s'en va à l'infini.

Si le domaine de variation de r a deux limites $r_{\min}$ et $r_{\max}$, le mouvement est fini, et la trajectoire est contenue tout entière à l'intérieur d'un anneau limité par les cercles $r = r_{\max}$ et $r = r_{\min}$. Cela ne signifie pas cependant que la trajectoire est obligatoirement une courbe fermée. Pendant le temps que met r à varier de $r_{\max}$ à $r_{\min}$, puis à $r_{\max}$, le rayon vecteur tourne d'un angle $\Delta\varphi$ égal d'après (14,7) à

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M}{r^2}\,dr}{\sqrt{2m\,(E-U) - \frac{M^2}{r^2}}}. \qquad (14,10)$$

Pour que la trajectoire soit fermée il faut et il suffit que cet angle soit une fraction rationnelle de 2π, c'est-à-dire ait la forme $\Delta\varphi = 2\pi\, m/n$, où m et n sont des nombres entiers. Alors, en effet, après n répétitions de cette période de temps, le rayon vecteur du point, ayant fait m tours complets, reprendra sa valeur initiale, c'est-à-dire que la trajectoire sera fermée.

Des cas de ce genre sont cependant exceptionnels, et pour une forme quelconque de $U(r)$ l'angle $\Delta\varphi$ n'est pas une fraction rationnelle de 2π. C'est pourquoi, en général, la trajectoire d'un mouvement fini n'est pas fermée. Elle passe une infinité de fois par les distances maximum et minimum (comme par exemple sur la fig. 9), et au bout d'un temps infini elle remplit tout l'anneau compris entre les deux cercles.

Il n'existe que deux types de champs centraux dans lesquels toutes les trajectoires de mouvements finis sont fermées. Ce sont les champs où l'énergie potentielle de la particule est proportionnelle à $\frac{1}{r}$ ou à r^2. Le premier de ces cas sera envisagé dans le prochain paragraphe, et le deuxième correspond à ce qu'on appelle un oscillateur spatial (voir problème 3, § 23).

Au point de rebroussement, la racine carrée dans (14,5) (et par la même occasion les expressions sous le signe somme dans (14,6) et (14,7)) change de signe. Si on compte l'angle φ à partir de la direction du rayon vecteur mené au point de rebroussement, les

segments de trajectoires adjacents à ce point de chaque côté ne différeront que par le signe de φ pour toutes les valeurs identiques de r; cela signifie que la trajectoire est symétrique par rapport à la direction indiquée. Partant par exemple de l'un des points $r = r_{\max}$, nous suivons la trajectoire jusqu'au point $r = r_{\min}$, après quoi nous avons une même portion de trajectoire disposée symétriquement jusqu'au point $r = r_{\max}$ suivant, etc., c'est-à-dire que toute la trajectoire s'obtient en répétant à l'aller et au retour les mêmes

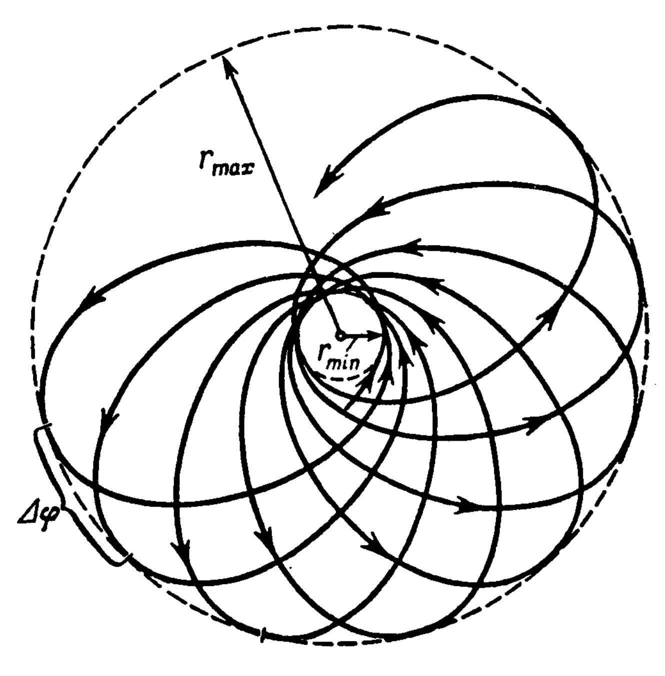


Fig. 9

portions. Cela concerne également les trajectoires infinies formées de deux branches symétriques allant du point de rebroussement $r_{\min}$ à l'infini.

L'existence d'une énergie centrifuge (pour un mouvement tel que $M \neq 0$) tendant vers l'infini comme $1/r^2$ lorsque $r \to 0$, conduit généralement à l'impossibilité pour les particules en mouvement de pénétrer jusqu'au centre du champ même si celui-ci est par lui-même un centre d'attraction. La « chute » d'une particule au centre n'est possible que si l'énergie potentielle tend suffisamment vite vers $-\infty$ quand $r \to 0$. De l'inégalité

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} > 0$$

ou

$$r^2 U(r) + \frac{M^2}{2m} < Er^2$$

il résulte que r ne peut prendre des valeurs tendant vers zéro que si

$$\lim_{r\to 0}[r^2U(r)] < -\frac{M^2}{2m}, \qquad (14,11)$$

c'est-à-dire que $U(r)$ doit tendre vers $-\infty$ soit comme $-\alpha/r^2$ avec $\alpha > \frac{M^2}{2m}$, soit proportionnellement à $-\frac{1}{r^n}$ avec $n>2$.

Problèmes

1. Intégrer les équations du mouvement d'un pendule sphérique : point matériel m se déplaçant sur la surface d'une sphère de rayon l dans le champ de pesanteur.

Solution. En coordonnées sphériques (origine au centre de la sphère et axe polaire dirigé verticalement vers le bas) la fonction de Lagrange du pendule est

$$L=\frac{ml^2}{2}(\dot\theta^2+\sin^2\theta\cdot\dot\varphi^2)+mgl\cos\theta.$$

La coordonnée φ est cyclique, il y a donc conservation de l'impulsion généralisée p_φ, que coïncide avec la composante suivant z du moment :

$$ml^2\sin^2\theta\cdot\dot\varphi=M_z=\text{Cte}. \qquad (1)$$

L'énergie est

$$E=\frac{ml^2}{2}(\dot\theta^2+\sin^2\theta\cdot\dot\varphi^2)-mgl\cos\theta=\frac{ml^2\dot\theta^2}{2}+\frac{M_z^2}{2ml^2\sin^2\theta}-mgl\cos\theta. \qquad (2)$$

Tirant de là $\dot\theta$ et séparant les variables, nous obtenons :

$$t=\int\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}[E-U_{\text{eff}}(\theta)]}}, \qquad (3)$$

où l'on a introduit l'« énergie potentielle efficace »

$$U_{\text{eff}}(\theta)=\frac{M_z^2}{2ml^2\sin^2\theta}-mgl\cos\theta.$$

Pour l'angle φ on a d'après (1) :

$$\varphi=\frac{M_z}{l\sqrt{2m}}\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{E-U_{\text{eff}}(\theta)}}. \qquad (4)$$

Les intégrales (3) et (4) se ramènent à des intégrales elliptiques respectivement de première et de troisième espèces.

Le domaine du mouvement pour l'angle θ est défini par la condition $E > U_{\text{eff}}$ et ses limites, par l'équation $E = U_{\text{eff}}$. Cette dernière est une équation du troisième degré en $\cos\theta$, ayant deux racines dans l'intervalle compris entre -1 et $+1$; ces racines déterminent la position de deux cercles parallèles sur la sphère, entre lesquels est comprise toute la trajectoire.

2. Intégrer les équations du mouvement d'un point matériel se déplaçant sur la surface d'un cône (angle au sommet égal à 2α), placé verticalement, le sommet en bas, dans le champ de pesanteur.

Solution. En coordonnées sphériques (origine au sommet du cône et axe polaire dirigé verticalement vers le haut) la fonction de Lagrange est

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\sin^2\alpha\cdot\dot{\varphi}^2)-mgr\cos\alpha.$$

La coordonnée φ est cyclique de sorte qu'il y a de nouveau conservation de

$$M_z=mr^2\sin^2\alpha\cdot\dot{\varphi}.$$

Energie :

$$E=\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{M_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha}+mgr\cos\alpha.$$

De la même manière que dans le problème n° 1, on trouve

$$t=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U_{\text{eff}}(r)]}},$$

$$\varphi=\frac{M_z}{\sin^2\alpha\sqrt{2m}}\int\frac{dr}{r^2\sqrt{E-U_{\text{eff}}(r)}}.$$

$$U_{\text{eff}}(r)=\frac{M_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha}+mgr\cos\alpha.$$

La condition $E=U_{\text{eff}}(r)$ est (pour $M_z\neq 0$) une équation du troisième degré en r ayant deux racines positives; ces racines déterminent la position de deux cercles horizontaux sur la surface du cône, entre lesquels est comprise la trajectoire.

3. Intégrer les équations du mouvement d'un pendule plan dont le point de suspension (de masse m_1) est susceptible de se déplacer horizontalement (voir fig. 2).

Solution. Dans la fonction de Lagrange trouvée au problème n° 2 du paragraphe 5, la coordonnée x est cyclique. Par suite, il y a conservation de l'impulsion généralisée P_x qui coïncide avec la composante horizontale de l'impulsion totale du système:

$$P_x=(m_1+m_2)\dot{x}+m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi=\text{Cte}. \tag{1}$$

On peut toujours considérer le système comme étant au repos dans son ensemble ; alors Cte $=0$, et l'intégration de l'équation (1) donne

$$(m_1+m_2)x+m_2l\sin\varphi=\text{Cte}, \tag{2}$$

relation qui exprime l'immobilité du centre d'inertie du système dans la direction horizontale. A partir de (1) on obtient l'énergie sous la forme

$$E=\frac{m_2l^2\dot{\varphi}^2}{2}\left(1-\frac{m_2}{m_1+m_2}\cos^2\varphi\right)-m_2gl\cos\varphi. \tag{3}$$

D'où

$$t=l\sqrt{\frac{m_2}{2(m_1+m_2)}}\int\sqrt{\frac{m_1+m_2\sin^2\varphi}{E+m_2gl\cos\varphi}}\,d\varphi.$$

En exprimant à l'aide de (2) les coordonnées $x_2 = x + l \sin \varphi$, $y_2 = l \cos \varphi$ de la particule m_2 en fonction de φ, on trouve que la trajectoire de cette particule se présente sous la forme d'une portion d'ellipse de demi-axe horizontal $\frac{lm_1}{(m_1+m_2)}$ et de demi-axe vertical l. Lorsque $m_1 \to \infty$, nous retrouvons le pendule mathématique habituel, oscillant suivant un arc de cercle.

§ 15. Le problème de Kepler

L'exemple le plus important de champ central est celui d'un champ dans lequel l'énergie potentielle est inversement proportionnelle à r et, respectivement, les forces sont inversement proportionnelles à r^2. C'est le cas par exemple du champ de gravitation newtonien et du champ électrostatique de Coulomb ; le premier est, comme on le sait, un champ d'attraction, et le second peut être aussi bien un champ d'attraction que de répulsion.

Considérons d'abord un champ d'attraction, dans lequel

$$U = -\frac{\alpha}{r} \tag{15,1}$$

la constante α étant positive. La représentation graphique de l'énergie potentielle «efficace»

$$U_{\text{eff}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{15,2}$$

a la forme indiquée sur la fig. 10. Lorsque $r \to 0$ elle tend vers $+\infty$, et lorsque $r \to \infty$ elle tend vers zéro par valeurs négatives ; quand $r = \frac{M^2}{\alpha m}$ elle passe par un minimum égal à

$$(U_{\text{eff}})_{\min} = -\frac{\alpha^2 m}{2M^2}. \tag{15,3}$$

Il est évident d'après la courbe que pour $E > 0$ le mouvement de la particule sera infini, et fini pour $E < 0$.

La forme de la trajectoire est donnée par la formule générale (14,7). En y posant $U = -\frac{\alpha}{r}$ et effectuant une intégration élémentaire, nous obtenons

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} + \text{Cte}.$$

Choisissons l'origine des angles φ de telle sorte que Cte $= 0$ et introduisons les notations

$$p = \frac{M^2}{m\alpha}, \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}, \tag{15,4}$$

nous écrirons alors la formule de la trajectoire sous la forme

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \varphi. \tag{15,5}$$

C'est l'équation d'une section conique ayant son foyer à l'origine des coordonnées; p et e sont appelés respectivement le *paramètre* et l'*excentricité* de l'orbite. Le choix de l'origine de φ est tel, comme on le voit d'après (15,5), que le point pour lequel $\varphi = 0$ soit le plus près possible du centre (ce point est appelé *périhélie* de l'orbite).

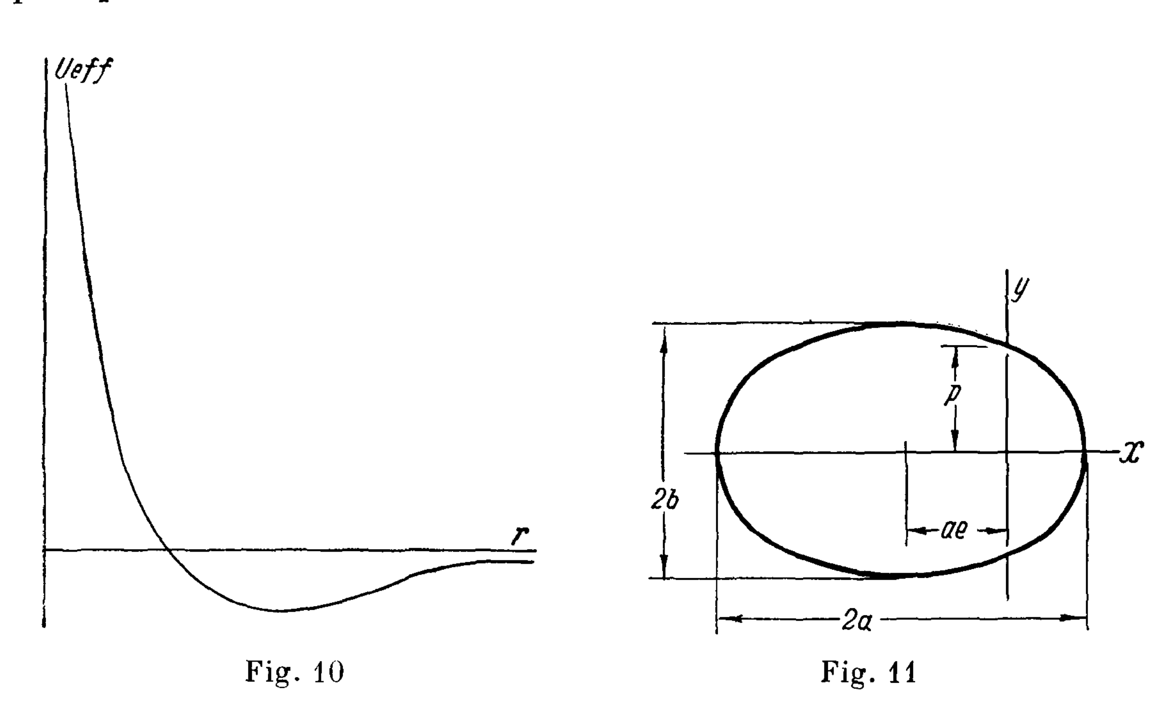


Fig. 10 Fig. 11

Dans le problème équivalent de deux corps interagissant l'un sur l'autre suivant la loi (15,1), l'orbite de chacune des particules est également une section conique dont le foyer se trouve à leur centre d'inertie commun.

Il est clair d'après (15,4) que si $E < 0$ l'excentricité $e < 1$, c'est-à-dire que l'orbite est une ellipse (fig. 11) et le mouvement, comme nous l'avons dit au début du paragraphe, est fini. Selon les formules connues de la géométrie analytique les grand et petit demi-axes de l'ellipse sont

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}. \tag{15,6}$$

La plus petite valeur possible de l'énergie coïncide avec (15,3), et on a $e = 0$, c'est-à-dire que l'ellipse se réduit à un cercle. Il est à noter que le grand demi-axe de l'ellipse dépend seulement de l'énergie (mais non du moment) de la particule. Les distances maxi-

mum et minimum au centre du champ (foyer de l'ellipse) sont

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e} = a(1-e), \quad r_{\max} = \frac{p}{1-e} = a(1+e). \qquad (15,7)$$

Ces expressions (avec a et e tirés de (15,6) et (15,4)) pourraient évidemment être obtenues directement comme racines de l'équation $U_{\text{eff}}(r) = E$.

Il est commode de déterminer le temps de révolution sur l'orbite elliptique, c'est-à-dire la période du mouvement T, à l'aide de la

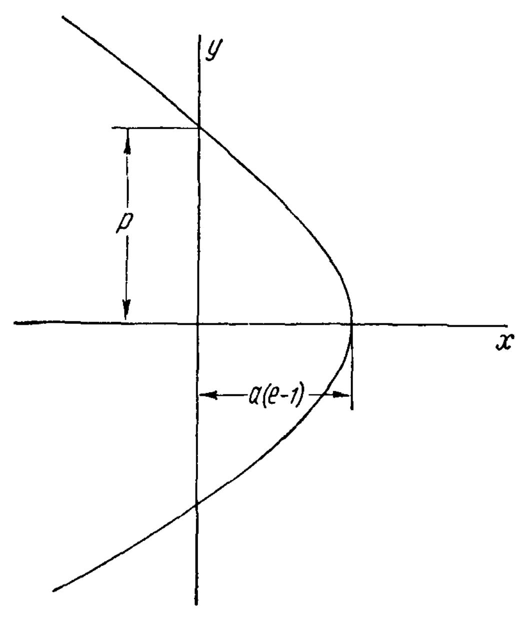


Fig. 12

loi de conservation du moment sous la forme de l'« intégrale des aires » (14,3). Intégrant cette égalité par rapport au temps de zéro à T, il vient :

$$2mf = TM,$$

où f est la surface de l'orbite. Pour l'ellipse $f = \pi ab$, et à l'aide des formules (15,6) on obtient :

$$T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}} = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} . \qquad (15,8)$$

Le fait que le carré de la période doit être proportionnel au cube des dimensions linéaires de l'orbite a déjà été indiqué au paragraphe 10. Notons encore que la période dépend seulement de l'énergie de la particule.

Pour $E \geqslant 0$ le mouvement est infini. Si $E > 0$ l'excentricité $e > 1$, c'est-à-dire que la trajectoire est une hyperbole, qui contourne le centre du champ (foyer), comme cela est indiqué sur la fig. 12.

La distance du périhélie au centre est

$$r_{\min} = \frac{p}{e+1} = a(e-1), \tag{15,9}$$

où

$$a = \frac{p}{e^2-1} = \frac{\alpha}{2E}$$

est le « demi-axe » de l'hyperbole.

Dans le cas où $E = 0$ l'excentricité $e = 1$, c'est-à-dire que la particule se meut sur une parabole, avec une distance du périhélie $r_{\min} = \frac{p}{2}$. Ce cas se produit lorsque la particule part d'un état de repos à l'infini.

La relation entre les coordonnées d'une particule en mouvement sur une orbite et le temps peut être trouvée à l'aide de la formule générale (14,6). On peut la représenter sous une forme paramétrique commode, de la façon suivante.

Considérons d'abord des orbites elliptiques. Introduisant a et e d'après (15,4) et (15,6), écrivons l'intégrale (14,6), qui détermine le temps, sous la forme

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{\alpha}{|E|} r - \frac{M^2}{2m|E|}}} = \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}}.$$

Avec la substitution naturelle

$$r - a = -ae\cos\xi$$

cette intégrale devient

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} \int (1 - e\cos\xi)\,d\xi = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}\,(\xi - e\sin\xi) + \text{Cte}.$$

En choisissant l'origine des temps de telle sorte que Cte s'annule, nous obtenons finalement la représentation paramétrique suivante de la relation entre r et t :

$$r = a(1 - e\cos\xi), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}\,(\xi - e\sin\xi) \tag{15,10}$$

(à l'instant $t = 0$ la particule se trouve à son périhélie). A l'aide de ce même paramètre ξ on peut exprimer aussi les coordonnées cartésiennes de la particule $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (les axes x et y étant dirigés respectivement suivant le grand et le petit demi-axes de l'ellipse). De (15,5) et (15,10) on tire :

$$ex = p - r = a(1 - e^2) - a(1 - e\cos\xi) = ae(\cos\xi - e),$$

et $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Finalement :

$$x = a(\cos\xi - e), \quad y = a\sqrt{1-e^2}\sin\xi. \tag{15,11}$$

A une révolution complète sur l'ellipse correspond une variation du paramètre ξ de zéro à 2π.

Des calculs tout à fait analogues nous conduisent aux résultats suivants pour des trajectoires hyperboliques :

$$\begin{aligned} r &= a(e\,\mathrm{ch}\,\xi - 1), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(e\,\mathrm{sh}\,\xi - \xi), \\ x &= a(e - \mathrm{ch}\,\xi), \quad y = a\sqrt{e^2-1}\,\mathrm{sh}\,\xi, \end{aligned} \tag{15,12}$$

où le paramètre ξ prend toutes les valeurs comprises entre $-\infty$ et $+\infty$.

Revenons maintenant au mouvement dans un champ de répulsion où

$$U = \frac{\alpha}{r} \tag{15,13}$$

$(\alpha > 0)$. Dans ce cas l'énergie potentielle efficace

$$U_{\text{eff}} = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

est monotone décroissante dans l'intervalle $(+\infty, 0)$ lorsque r varie de zéro à ∞. L'énergie de la particule ne peut être que positive et le mouvement est toujours infini. Tous les calculs ici sont analogues à ceux que nous avons effectués plus haut. La trajectoire est une hyperbole (ou une parabole si $E = 0$) :

$$\frac{p}{r} = -1 + e\cos\varphi \tag{15,14}$$

(p et e étant déterminés par les formules (15,4)). Elle passe près du centre du champ comme cela est indiqué sur la fig. 13. La distance du périhélie est

$$r_{\text{min}} = \frac{p}{e-1} = a(e+1). \tag{15,15}$$

Les relations en fonction du temps sont données par les équations paramétriques

$$\begin{aligned} r &= a(e\,\mathrm{ch}\,\xi + 1), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(e\,\mathrm{sh}\,\xi + \xi), \\ x &= a(\mathrm{ch}\,\xi + e), \quad y = a\sqrt{e^2-1}\,\mathrm{sh}\,\xi. \end{aligned} \tag{15,16}$$

Pour conclure ce paragraphe montrons que pour le mouvement dans un champ $U = \frac{\alpha}{r}$ (α étant de signe quelconque), il existe une inté-

grale spécifique de ce champ. Il est facile de vérifier par un calcul direct que l'expression

$$\mathbf{v}\times\mathbf{M}+\frac{\alpha\mathbf{r}}{r}=\text{Cte}. \tag{15,17}$$

En effet sa dérivée totale par rapport au temps est

$$\dot{\mathbf{v}}\times\mathbf{M}+\frac{\alpha\mathbf{v}}{r}-\frac{\alpha\mathbf{r}\,(\mathbf{vr})}{r^3},$$

ou, en substituant $\mathbf{M}=m\mathbf{r}\times\mathbf{v}$:

$$m\mathbf{r}\,(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})-m\mathbf{v}\,(\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}})+\frac{\alpha\mathbf{v}}{r}-\frac{\alpha\mathbf{r}\,(\mathbf{vr})}{r^3};$$

et, posant ici, selon les équations du mouvement, $m\dot{\mathbf{v}}=\frac{\alpha\mathbf{r}}{r^3}$, nous trouvons bien finalement, que cette expression s'annule.

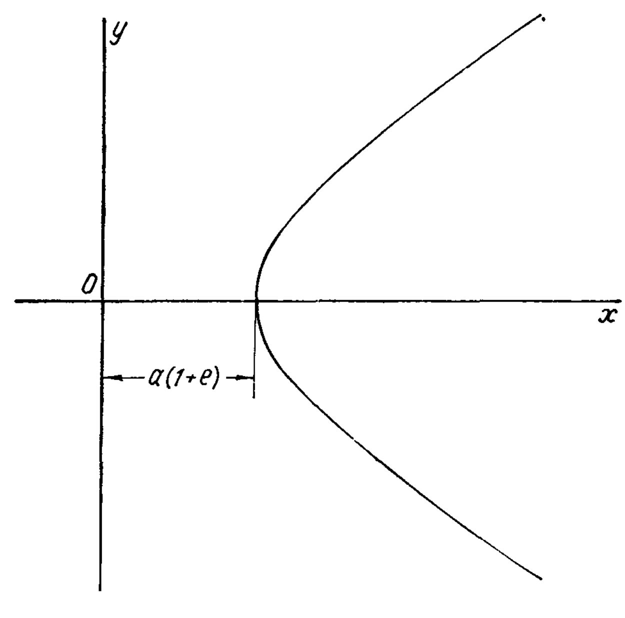


Fig. 13

Le vecteur conservatif (15,17) est dirigé suivant le grand axe du foyer au périhélie et sa grandeur est égale à αe. On peut s'en convaincre en considérant sa valeur au périhélie.

Soulignons que l'intégrale première (15,17), de même que les intégrales M et E, est une fonction uniforme de l'état (position et vitesse) de la particule. Nous verrons au § 50 que l'apparition de cette intégrale uniforme supplémentaire est due à ce qu'on appelle la dégénérescence du mouvement.

Problèmes

1. Trouver la relation entre les coordonnées et le temps pour une particule en mouvement dans un champ $U = -\frac{\alpha}{r}$ d'énergie $E = 0$ (parabole).

Solution. Dans l'intégrale

$$t = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m} r - \frac{M^2}{m^2}}}$$

effectuons la substitution

$$r = \frac{M^2}{2m\alpha}(1+\eta^2) = \frac{p}{2}(1+\eta^2),$$

nous obtenons la représentation paramétrique suivante de la relation cherchée

$$r = \frac{p}{2}(1+\eta^2), \quad t = \sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}}\,\frac{\eta}{2}\left(1+\frac{\eta^2}{2}\right);$$

$$x = \frac{p}{2}(1-\eta^2), \qquad y = p\eta.$$

Le paramètre η prend toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$.

2. Intégrer les équations du mouvement d'un point matériel dans un champ central $U = -\alpha/r^2$, $\alpha > 0$.

Solution. D'après les formules (14,6) et (14,7), en choisissant convenablement les origines pour φ et t nous trouvons

a) pour $E > 0$, $\frac{M^2}{2m} > \alpha$ $\quad \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{M^2 - 2m\alpha}} \cos\left[\varphi\sqrt{1 - \frac{2m\alpha}{M^2}}\right]$,

b) pour $E > 0$, $\frac{M^2}{2m} < \alpha$ $\quad \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{2m\alpha - M^2}} \operatorname{sh}\left[\varphi\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2} - 1}\right]$,

c) pour $E < 0$, $\frac{M^2}{2m} < \alpha$ $\quad \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2m|E|}{2m\alpha - M^2}} \operatorname{ch}\left[\varphi\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2} - 1}\right]$.

Dans les trois cas

$$t = \frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{Er^2 - \frac{M^2}{2m} + \alpha}\ .$$

Dans les cas b) et c) la particule « tombe » au centre suivant une trajectoire qui se rapproche de l'origine des coordonnées en même temps que $\varphi \to \infty$. La chute à partir d'une distance r s'effectue en un temps fini égal à

$$\frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\left\{\sqrt{\alpha - \frac{M^2}{2m} + Er^2} - \sqrt{\alpha - \frac{M^2}{2m}}\right\}.$$

3. Lorsqu'on ajoute à l'énergie potentielle $U = -\frac{\alpha}{r}$ une quantité petite $\delta U(r)$ la trajectoire d'un mouvement fini cesse d'être fermée et pour chaque

révolution le périhélie de l'orbite se déplace d'un petit angle $\delta\varphi$. Déterminer $\delta\varphi$ pour a) $\delta U = \frac{\beta}{r^2}$ et b) $\delta U = \frac{\gamma}{r^3}$.

Solution. Lorsque r varie de r_{min} à r_{max} puis de nouveau à r_{min}, l'angle $\delta\varphi$ varie d'une valeur donnée par la formule (14,10) que nous écrirons sous la forme :

$$\Delta\varphi = -2\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{min}}^{r_{max}}\sqrt{2m(E-U)-\frac{M^2}{r^2}}\,dr$$

(dans le but d'éviter plus bas des intégrales divergentes). Posons $U = -\frac{\alpha}{r} + \delta U$ et développons l'expression sous le signe somme suivant les puissances de δU ; le terme d'ordre zéro du développement donne 2π, et le terme du premier ordre le déplacement $\delta\varphi$ cherché :

$$\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{min}}^{r_{max}}\frac{2m\delta U\cdot dr}{\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{r^2}}} = \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{2m}{M}\int_0^{\pi} r^2\delta U\,d\varphi\right), \tag{1}$$

où, de l'intégration par rapport à dr, nous sommes passés à l'intégration par rapport à $d\varphi$ le long de la trajectoire du mouvement « non perturbé ».

Dans le cas a) l'integration dans (1) est triviale et donne :

$$\delta\varphi = -\frac{2\pi\beta m}{M^2} = -\frac{2\pi\beta}{\alpha p}$$

(p est le paramètre de l'ellipse non perturbée donné par (15,4)). Dans le cas b) $r^2\delta U = \frac{\gamma}{r}$, et tirant $1/r$ de (15,5) on obtient

$$\delta\varphi = -\frac{6\pi\alpha\gamma m^2}{M^4} = -\frac{6\pi\gamma}{\alpha p^2}.$$

CHAPITRE IV

CHOCS DE PARTICULES

§ 16. Désintégration des particules

Les lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie permettent déjà par elles-mêmes d'aboutir, dans de nombreux cas, à une série de conclusions importantes quant aux propriétés de divers processus mécaniques. Le fait que ces propriétés ne dépendent absolument pas de l'espèce concrète d'interaction entre les particules engagées dans ces processus joue alors un rôle essentiel.

Commençons par la désintégration « spontanée » (c'est-à-dire non provoquée par des forces extérieures) d'une particule en deux « composantes », autrement dit en deux autres particules se déplaçant après la désintégration indépendamment l'une de l'autre.

Ce processus apparaît sous sa forme la plus simple lorsqu'on le considère dans un système de référence où la particule (avant la désintégration) se trouvait au repos. En vertu de la loi de conservation de l'impulsion, la somme des impulsions de deux particules nées de la désintégration est également nulle, c'est-à-dire que les particules s'éloignent l'une de l'autre avec des impulsions égales et dirigées en sens inverse, et dont la valeur absolue commune (appelons-la p_0) est déterminée par la loi de conservation de l'énergie

$$E_{\text{int}} = E_{1\,\text{int}} + \frac{p_0^2}{2m_1} + E_{2\,\text{int}} + \frac{p_0^2}{2m_2},$$

où m_1 et m_2 sont les masses des particules, $E_{1\,\text{int}}$ et $E_{2\,\text{int}}$ leur énergie interne, et E_{int} l'énergie interne de la partucule initiale. Désignons par ε l'« énergie de désintégration », c'est-à-dire la différence

$$\varepsilon = E_{\text{int}} - E_{1\,\text{int}} - E_{2\,\text{int}} \tag{16,1}$$

(il est évident que cette grandeur doit être positive, pour que la désintégration soit généralement possible). On a alors :

$$\varepsilon = \frac{p_0^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{p_0^2}{2m}, \tag{16,2}$$

ce qui détermine p_0 (m est la masse réduite des deux particules); leurs vitesses sont $v_{10} = p_0/m_1$, $v_{20} = p_0/m_2$.

Passons maintenant à un système de référence dans lequel la particule initiale est animée avant la désintégration d'une vitesse V. On l'appelle habituellement système du laboratoire (ou système « l ») par opposition au « système du centre d'inertie » (ou système « c »), dans lequel l'impulsion totale est nulle. Considérons l'une

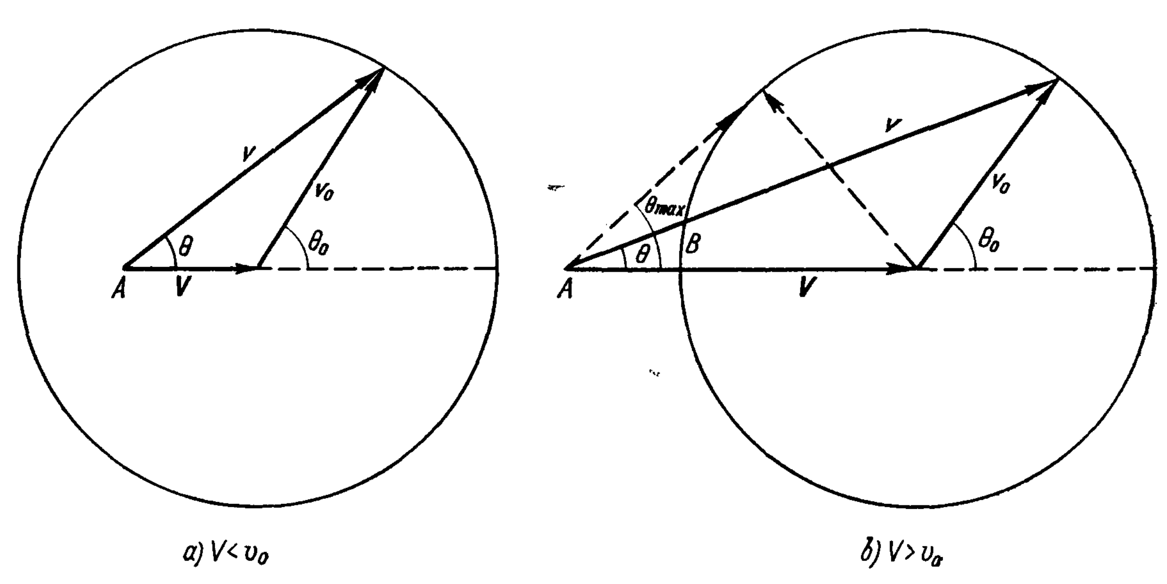


Fig. 14

des particules résultant de la désintégration, et soit $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}_0$ ses vitesses respectivement dans les systèmes « l » et « c ». L'égalité évidente $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}_0$ ou $\mathbf{v} - \mathbf{V} = \mathbf{v}_0$ nous donne:

$$v^2 + V^2 - 2vV\cos\theta = v_0^2, \tag{16,3}$$

où θ est l'angle sous lequel la particule s'écarte de la direction de la vitesse $\mathbf{V}$. Cette équation détermine la relation entre la vitesse de la particule résultante et la direction de sa trajectoire dans le système « l ». On peut la représenter graphiquement à l'aide du diagramme de la fig. 14. La vitesse $\mathbf{v}$ est donnée par un vecteur mené en un point quelconque du cercle de rayon v_0 [1] à partir du point A situé à une distance V du centre du cercle. Les figures 14 a) et b) correspondent respectivement au cas $V < v_0$ et $V > v_0$. Dans le premier cas la particule peut s'éloigner sous un angle θ quelconque. Dans le second cas elle ne peut aller que vers l'avant et sous un angle

[1] Plus exactement en un point quelconque de la sphère de rayon v_0, dont le cercle de la fig. 14 représente un grand cercle.

θ n'excédant pas la valeur θ_{max} donnée par l'égalité

$$\sin \theta_{max} = \frac{v_0}{V} \tag{16,4}$$

(direction de la tangente au cercle menée du point A).

La relation entre les angles θ et θ_0 sous lesquels s'éloigne la particule dans les systèmes « l » et « c » est évidente d'après le diagramme; elle est donnée par la formule

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_0 \sin \theta_0}{v_0 \cos \theta + V}. \tag{16,5}$$

En résolvant cette équation par rapport à $\cos \theta_0$ on obtient après des transformations élémentaires

$$\cos \theta_0 = -\frac{V}{v_0} \sin^2 \theta \pm \cos \theta \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_0^2} \sin^2 \theta}. \tag{16,6}$$

Si $v_0 > V$ la relation entre θ_0 et θ est univoque, comme le montre la fig. 14*a*). Dans la formule (16,6) il faut alors choisir le signe $+$ devant la racine (de telle sorte qu'on ait $\theta_0 = 0$ pour $\theta = 0$). Mais si $v_0 < V$ la relation entre θ_0 et θ n'est plus univoque: pour chaque valeur de θ on a deux valeurs de θ_0, correspondant (sur la fig. 14*b*)) aux vecteurs $\mathbf{v}_0$ menés du centre du cercle au point B ou au point C; à ces vecteurs correspondent les deux signes devant la racine dans (16,6).

Dans les applications physiques on a habituellement affaire non plus à la désintégration d'une particule, mais à celle de nombreuses particules identiques, ce qui pose alors le problème de la répartition des particules résultantes suivant les directions, les énergies, etc. Nous supposerons dans ce cas que les particules initiales sont orientées dans l'espace chaotiquement, c'est-à-dire en moyenne de façon isotrope.

Dans un système « c » la solution de ce problème est triviale: toutes les particules résultantes (de même espèce) ont la même énergie, et la répartition de leurs trajectoires est isotrope. Ce fait découle de notre hypothèse d'une orientation chaotique des particules initiales. Il signifie que la quantité de particules qui passent dans un élément d'angle solide $d\omega_0$, est proportionnelle à la grandeur de cet élément, c'est-à-dire égale à $\frac{d\omega_0}{4\pi}$. En posant $d\omega_0 = 2\pi \sin \theta_0 \, d\theta_0$ nous tirons de là la distribution suivant les angles θ_0, c'est-à-dire:

$$\frac{1}{2} \sin \theta_0 \, d\theta_0. \tag{16,7}$$

Les répartitions dans le système « l » s'obtiennent à l'aide d'une transformation convenable de cette expression. Déterminons par

exemple la distribution par rapport à l'énergie cinétique dans le système « l ». Elevant au carré l'égalité $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{V}$ il vient :

$$v^2 = v_0^2 + V^2 + 2v_0V\cos\theta_0,$$

d'où

$$d\cos\theta_0 = \frac{d(v^2)}{2v_0V}.$$

Substituant ici la valeur $T = \frac{mv^2}{2}$ de l'énergie cinétique (où m est égal à m_1 ou m_2 selon l'espèce de la particule résultante considérée) et portant le tout dans (16,7), nous obtenons la distribution cherchée

$$\frac{dT}{2mv_0V}. \tag{16,8}$$

L'énergie cinétique peut prendre toutes les valeurs comprises entre le minimum $T_{\min} = \frac{m}{2}(v_0 - V)^2$ et le maximum $T_{\max} = \frac{m}{2}(v_0 + V)^2$. Dans cet intervalle les particules sont distribuées d'après (16,8) de façon homogène.

Lorsque la désintégration d'une particule donne plus de deux composantes, les lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie laissent évidemment beaucoup plus d'arbitraire aux vitesses et directions des particules nées de la désintégration. En particulier, l'énergie de ces particules dans le système « c » est loin d'avoir une valeur unique. Il existe, cependant, une limite supérieure à l'énergie cinétique que chaque particule peut emporter avec soi.

Pour déterminer cette limite, nous considérerons l'ensemble des particules résultant de la désintégration, à l'exception de l'une d'elles (de masse m_1) comme un seul système ; soit E'_{int} son énergie « interne ». L'énergie cinétique de la particule m_1 sera alors d'après (16,1) et (16,2) :

$$T_{10} = \frac{p_0^2}{2m_1} = \frac{M - m_1}{M}(E_{\text{int}} - E_{1\,\text{int}} - E'_{\text{int}})$$

(M masse de la particule initiale). Il est évident que T_{10} aura sa valeur maximum quand E'_{int} sera minimum. Il faut pour cela que les particules résultantes, à l'exception de la particule m_1, se déplacent avec la même vitesse ; alors E'_{int} se réduit simplement à la somme de leurs énergies internes, et la différence $E_{\text{int}} - E_{1\text{int}} - E'_{\text{int}}$ est l'énergie de désintégration ε. Ainsi

$$(T_{10})_{\max} = \frac{M - m_1}{M}\varepsilon. \tag{16,9}$$

Problèmes

1. Trouver la relation entre les angles θ_1 et θ_2 (dans un système « l ») sous lesquels s'éloignent les deux particules résultant d'une désintégration.

Solution. Dans un système « c » les angles de départ des deux particules sont liés par $\theta_{10} = \pi - \theta_{20}$. En désignant θ_{10} simplement par θ_0, et en appliquant la formule (16,5) à chacune des particules, on a :

$$V + v_{10} \cos \theta_0 = v_{10} \sin \theta_0 \operatorname{ctg} \theta_1,$$

$$V - v_{20} \cos \theta_0 = v_{20} \sin \theta_0 \operatorname{ctg} \theta_2.$$

Il s'agit d'éliminer θ_0 de ces deux égalités. Pour cela, tirons-en d'abord $\cos \theta_0$ et $\sin \theta_0$, après quoi nous formerons la somme $\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0 = 1$. Considérant également que $\frac{v_{10}}{v_{20}} = \frac{m_2}{m_1}$ et utilisant (16,2), nous trouvons finalement l'équation suivante

$$\frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta_2 + \frac{m_1}{m_2} \sin^2 \theta_1 - 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) =$$

$$= \frac{2\varepsilon}{(m_1 + m_2) V^2} \sin^2 (\theta_1 + \theta_2).$$

2. Trouver la distribution en directions des particules résultantes dans le système « l ».

Solution. Pour $v_0 > V$ portons (16,6) avec le signe $+$ devant la racine dans (16,7) et nous obtenons la distribution cherchée sous la forme

$$\frac{\sin \theta \, d\theta}{2} \left[2 \frac{V}{v_0} \cos \theta + \frac{1 + \frac{V^2}{v_0^2} \cos 2\theta}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_0^2} \sin^2 \theta}} \right] \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi).$$

Pour $v_0 < V$ il faut tenir compte de deux relations possibles entre θ_0 et θ. Puisque, lorsque θ croît, l'une des valeurs correspondantes de θ_0 croît également et que l'autre diminue, il faut donc prendre la différence (et non la somme) des expressions de $d \cos \theta_0$ les deux signes devant la racine dans (16,6). On obtient :

$$\sin \theta \, d\theta \frac{1 + \frac{V^2}{v_0^2} \cos 2\theta}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_0^2} \sin^2 \theta}} \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \theta_{max}).$$

3. Déterminer dans le système « l » l'intervalle des valeurs que peut prendre l'angle θ entre les directions des trajectoires des deux particules résultantes.

Solution. L'angle θ est la somme $\theta_1 + \theta_2$ des angles définis par la formule (16,5) (voir problème 1) ; le plus simple est de calculer la tangente de cet angle. La recherche des extrema de l'expression que l'on obtient conduit aux intervalles suivants pour les valeurs possibles de θ, en fonction de la grandeur relative V et

de v_{10} et v_{20} (pour fixer les idées posons $v_{20} > v_{10}$) :

$$0 < \theta < \pi, \text{ si } v_{10} < V < v_{20};$$
$$\pi - \theta_0 < \theta < \pi, \text{ si } V < v_{10};$$
$$0 < \theta < \theta_0, \text{ si } V > v_{20},$$

la valeur de θ_0 étant donnée par la formule

$$\sin \theta_0 = \frac{V(v_{10} + v_{20})}{V^2 + v_{10}v_{20}}.$$

§ 17. Chocs élastiques de particules

On dit que le choc de deux particules est élastique quand il n'entraîne pas de modification de leur état interne. En conséquence, lorsqu'on applique la loi de conservation de l'énergie à un choc de ce genre, on peut ne pas tenir compte de l'énergie interne des particules.

Le choc trouve son expression la plus simple dans un système de référence où le centre d'inertie des deux particules est au repos (système « c ») ; comme au paragraphe précédent on affectera de l'indice 0 les valeurs des grandeurs dans ce système. Les vitesses des particules avant le choc dans le système « c » sont liées à leurs vitesses v_1 et v_2 dans le système du laboratoire par les relations

$$\mathbf{v}_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{v}, \qquad \mathbf{v}_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{v},$$

où $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ (voir (13,2)).

En vertu de la loi de conservation de l'impulsion, après le choc, les impulsions des deux particules restent égales en grandeur et opposées en direction ; en vertu de la loi de conservation de l'énergie, leurs valeurs absolues restent également inchangées. Ainsi, dans le système « c », le résultat du choc se ramène à une simple inversion des vitesses des deux particules. Si on désigne par $\mathbf{n}_0$ le vecteur unitaire dans la direction de la vitesse de la particule m_1 après le choc, les vitesses des deux particules après le choc seront

$$\mathbf{v}'_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v\mathbf{n}_0, \quad \mathbf{v}'_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v\mathbf{n}_0. \tag{17,1}$$

Pour revenir au système du laboratoire il faut ajouter à ces expressions la vitesse $\mathbf{V}$ du centre d'inertie. On obtient alors pour la vitesse des particules après le choc dans le système « l » :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} v\mathbf{n}_0 + \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}, \\ \mathbf{v}'_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v\mathbf{n}_0 + \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \tag{17,2}$$

Là se limitent les renseignements que l'on peut obtenir sur les chocs en partant des seules lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie. En ce qui concerne sa direction, le vecteur $\mathbf{n}_0$ dépend de la loi d'interaction des particules et de leur position réciproque pendant le choc.

On peut interpréter géométriquement les résultats obtenus. Le plus simple pour cela est de passer des vitesses aux impulsions.

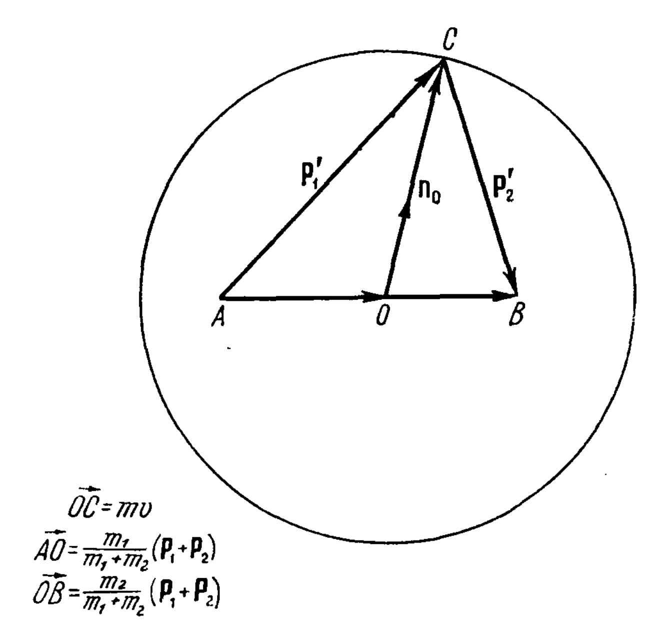


Fig. 15

En multipliant les égalités (17,2) respectivement par m_1 et m_2 nous obtenons:

$$\mathbf{p}_1' = mv\mathbf{n}_0 + \frac{m_1}{m_1+m_2}(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2), \quad \mathbf{p}_2' = -mv\mathbf{n}_0 + \frac{m_2}{m_1+m_2}(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2) \qquad (17,3)$$

($m = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ est la masse réduite). Traçons un cercle de rayon mv et effectuons la construction indiquée sur la fig. 15. Si le vecteur unité $\mathbf{n}_0$ est dirigé suivant $\overrightarrow{OC}$, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$ donnent respectivement les impulsions $\mathbf{p}_1'$ et $\mathbf{p}_2'$. Les vecteurs $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$ étant donnés, le rayon du cercle et la position des points A et B restent invariables, mais le point C peut avoir une position quelconque sur le cercle.

Examinons plus en détail le cas où l'une des particules (par exemple m_2) était au repos avant le choc. Dans ce cas la longueur $OB = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\,p_1 = mv$ coïncide avec le rayon, c'est-à-dire que le point B est situé sur le cercle. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ coïncide alors avec l'impulsion p_1 de la première particule avant le choc. Par suite, le point A se trouve à l'intérieur du cercle (si $m_1 < m_2$) ou à l'extérieur (si $m_1 > m_2$). Les diagrammes correspondants sont représentés

sur la fig. 16, *a*) et *b*). Les angles θ_1 et θ_2 qui y sont indiqués sont les angles sous lesquels les particules s'écartent après le choc de la direction de celui-ci (direction de $\mathbf{p}_1$). L'angle au centre désigné sur la figure par la lettre χ (donnant la direction de $\mathbf{n}_0$) représente l'angle de déviation de la première particule dans le système du

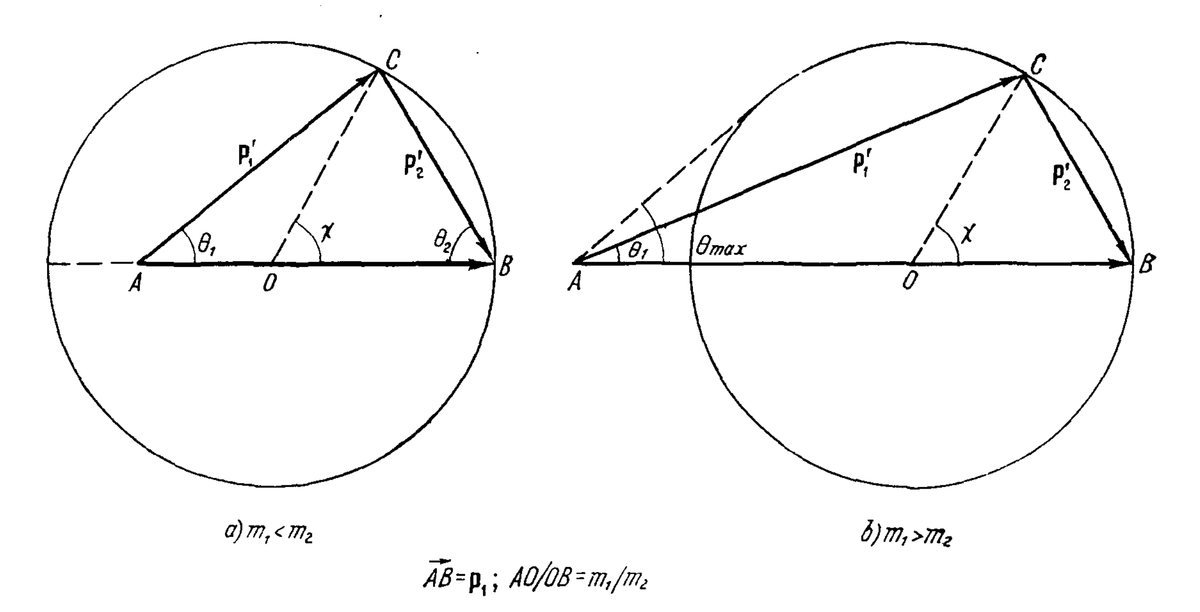


Fig. 16

centre d'inertie. Il est clair d'après le dessin que les angles θ_1 et θ_2 peuvent être exprimés en fonction de l'angle χ par les formules

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{m_2 \sin\chi}{m_1 + m_2\cos\chi}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}. \tag{17,4}$$

Ecrivons également les formules donnant les valeurs absolues des vitesses des deux particules après le choc en fonction du même angle χ :

$$v_1' = \sqrt{\frac{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos\chi}{m_1 + m_2}}\, v, \quad v_2' = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \sin\frac{\chi}{2}. \tag{17,5}$$

La somme $\theta_1 + \theta_2$ est l'angle auquel les deux particules s'écartent l'une de l'autre après le choc. Il est évident que $\theta_1 + \theta_2 > \frac{\pi}{2}$ pour $m_1 < m_2$ et $\theta_1 + \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ pour $m_1 > m_2$.

Au cas où les deux particules après le choc se meuvent sur une même droite (« choc de front ») correspond $\chi = \pi$, c'est-à-dire que le point C est situé sur le diamètre à gauche du point A (fig. 16,*a*; $\mathbf{p}_1'$ et $\mathbf{p}_2'$ sont alors de sens contraire) ou entre les points A et O (fig. 16,*b*; $\mathbf{p}_1'$ et $\mathbf{p}_2'$ sont alors de même sens).

Les vitesses des particules après le choc sont dans ce cas

$$\mathbf{v}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{v}, \qquad \mathbf{v}_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{v}. \tag{17,6}$$

La valeur de $\mathbf{v}_2'$ est alors la plus grande possible; l'énergie maximum que peut acquérir la particule que se trouvait au repos, à la suite du choc, est par conséquent:

$$E'_{2\,\max} = \frac{m_2 v_2'^2 \max}{2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_1, \tag{17,7}$$

où $E_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$ est l'énergie initiale de la particule incidente.

Si $m_1 < m_2$ la vitesse de la première particule après le choc peut prendre une direction quelconque. Si par contre $m_1 > m_2$,

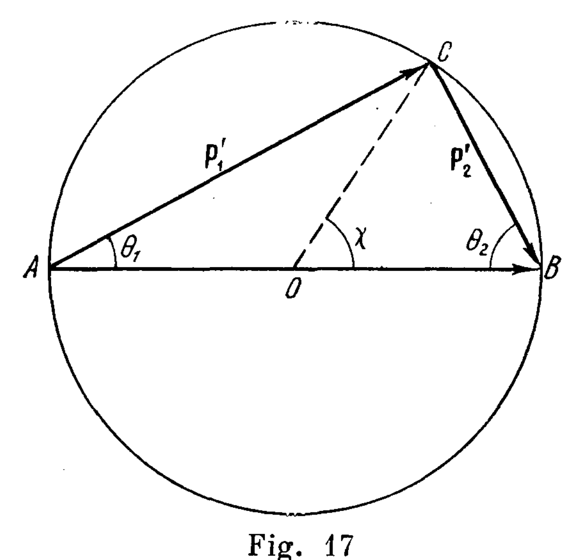


Fig. 17

l'angle de déviation de la particule ne peut dépasser une valeur maximum correspondant à une position du point C (fig. 16,b) telle que la droite AC soit tangente au cercle. Il est évident que $\sin \theta_{1\max} = OC/OA$, soit

$$\sin \theta_{1\,\max} = \frac{m_2}{m_1}. \tag{17,8}$$

Le choc de particules de même masse (dont l'une est initialement au repos) s'exprime de façon particulièrement simple. Dans ce cas, les points B et A sont tous les deux sur le cercle (fig. 17) et on a

$$\theta_1 = \frac{\chi}{2} \qquad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}, \tag{17,9}$$

$$v_1' = v \cos\frac{\chi}{2}, \qquad v_2' = v \sin\frac{\chi}{2}. \tag{17,10}$$

Notons qu'après le choc les particules s'éloignent l'une de l'autre sous un angle droit.

Problème

Exprimer dans le système « l » les vitesses après le choc de deux particules dont l'une (m_1) était en mouvement et l'autre (m_2) au repos, en fonction de l'angle sous lequel elles s'écartent l'une de l'autre.

Solution. La fig. 16 nous donne $p_2' = 2 \cdot OB \cos\theta_2$ soit

$$v_2' = 2v \frac{m}{m_2} \cos\theta_2.$$

Pour l'impulsion $p_1' = AC$ on a l'équation

$$OC^2 = AO^2 + p_1'^2 - 2AO \cdot p_1' \cos\theta_1$$

ou

$$\left(\frac{v_1'}{v}\right)^2 - \frac{2m}{m_2}\frac{v_1'}{v}\cos\theta_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

D'où

$$\frac{v_1'}{v} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\cos\theta_1 \pm \frac{1}{m_1 + m_2}\sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2\theta_1}$$

(pour $m_1 > m_2$ les deux signes devant la racine sont valables, et pour $m_2 > m_1$, le signe $+$).

§ 18. Diffusion des particules

Nous avons déjà vu au paragraphe précédent que pour déterminer complètement le résultat du choc de deux particules (c'est-à-dire l'angle χ) on doit résoudre les équations du mouvement en tenant compte de la forme concrète prise par la loi d'interaction des particules.

Conformément à la règle générale nous considérons d'abord le problème équivalent de la déviation d'une particule de masse m dans un champ $U(r)$ par un centre de force immobile (placé au centre d'inertie des particules).

Comme on l'a vu au § 14, la trajectoire d'une particule dans un champ central est symétrique par rapport à la droite passant par le point de l'orbite le plus proche du centre (OA sur la fig. 18). C'est pourquoi les deux asymptotes de l'orbite coupent cette droite sous le même angle. Si on appelle φ_0 cet angle, l'angle de déviation de la particule lorsqu'elle passe près du centre est, comme on le voit sur le dessin,

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0|. \tag{18,1}$$

Or l'angle φ_0 est donné d'après (14,7) par l'intégrale

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2}\,dr}{\sqrt{2m\,[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}}, \tag{18,2}$$

prise entre la position de la particule la plus proche du centre et sa position éloignée à l'infini. Rappelons que $r_{\min}$ est racine de l'expression sous le radical.

Pour un mouvement infini tel que celui auquel nous avons affaire ici, il est commode d'utiliser, au lieu des constantes E et M, la vitesse v_∞ de la particule à l'infini et ce qu'on appelle la *distance de visée* ρ. Cette dernière est la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre sur la direction de v_∞, c'est-à-dire la distance à laquelle

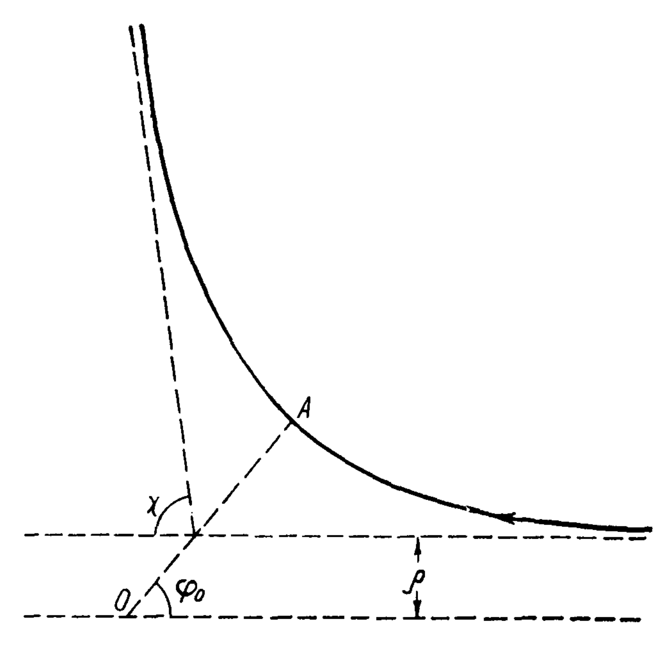


Fig. 18

la particule passerait du centre, si le champ de force n'existait pas (fig. 18). En fonction de ces grandeurs, l'énergie et le moment s'expriment par

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2}, \qquad M = m\rho v_\infty, \tag{18,3}$$

et la formule (18,2) devient

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_\infty^2}}}. \tag{18,4}$$

Avec (18,1) elle détermine la relation entre χ et ρ.

Dans les applications physiques on a souvent affaire non à la déviation d'une particule individuelle, mais à la *diffusion* d'un faisceau de particules semblables parvenant au centre de diffusion avec la même vitesse v_∞. Les différentes particules du faisceau ont des distances de visée différentes et, par suite, sont diffusées sous

des angles χ différents. Soit dN le nombre de particules diffusées pendant l'unité de temps dans l'angle compris entre χ et $\chi + d\chi$. Il n'est pas commode de caractériser le processus de diffusion à l'aide de ce nombre lui-même, car il dépend de la densité du faisceau incident (il lui est proportionnel). Aussi introduirons-nous le rapport

$$d\sigma = \frac{dN}{n}, \tag{18,5}$$

où n est le nombre de particules traversant pendant l'unité de temps l'unité de surface d'une section droite du faisceau (nous supposons naturellement que le faisceau est homogène dans toute sa section). Ce rapport a la dimension d'une surface ; on l'appelle *section efficace de diffusion.* Il est complètement déterminé par la forme du champ de diffusion et constitue la caractéristique la plus importante du processus de diffusion.

Nous considérerons que le lien entre χ et ρ est réciproquement univoque ; il en est ainsi lorsque l'angle de diffusion est une fonction monotone décroissante de la distance de visée. Dans ce cas seules sont diffusées dans l'intervalle $(\chi, \chi + d\chi)$ les particules dont la distance de visée est comprise entre $\rho(\chi)$ et $\rho(\chi) + d\rho(\chi)$. Le nombre de ces particules est égal au produit de n par la surface de l'anneau compris entre les cercles de rayons ρ et $\rho + d\rho$, c'est-à-dire $dN = 2\pi\rho\, d\rho \cdot n$. D'où la section efficace

$$d\sigma = 2\pi\rho\, d\rho. \tag{18,6}$$

Pour trouver la relation entre cette section et l'angle de diffusion, il suffit d'écrire cette expression sous la forme

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi. \tag{18,7}$$

Si nous écrivons ici la valeur absolue de la dérivée $d\rho/d\chi$, c'est parce qu'elle peut être négative (comme c'est le cas habituellement d'ailleurs) [1]. On rapporte souvent $d\sigma$ non à un élément d'angle plan $d\chi$, mais à un élément d'angle solide $d\omega$. L'angle solide entre deux cônes d'écartements χ et $\chi + d\chi$ a pour valeur $d\omega = 2\pi \sin\chi\, d\chi$. Nous avons donc d'après (18,7) :

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\omega. \tag{18,8}$$

Revenant au problème de la diffusion d'un faisceau de particules non par un centre de force immobile, mais par d'autres parti-

[1] Si la fonction $\rho(\chi)$ est multiforme, il faut évidemment prendre la somme de ces expressions pour toutes les branches de la fonction.

cules initialement au repos, nous pouvons montrer que la formule (18,7) définit la section efficace en fonction de l'angle de diffusion dans le système du centre d'inertie. Pour trouver la section efficace en fonction de l'angle θ dans le système du laboratoire, il faut exprimer dans cette formule χ à l'aide de θ, d'après les formules (17,4). On obtient ainsi aussi bien l'expression de la section de diffusion du faisceau incident (χ exprimé en fonction de θ_1), que celle des particules initialement au repos (χ exprimé en fonction de θ_2).

Problèmes

1. Déterminer la section efficace de diffusion des particules par une bille de rayon a parfaitement solide (c'est-à-dire avec une loi d'interaction telle que $U = \infty$ pour $r < a$ et $U = 0$ pour $r > a$).

Solution. Puisqu'à l'extérieur de la bille la particule se meut librement et qu'elle ne peut pas pénétrer à l'intérieur, la trajectoire se compose de deux droi-

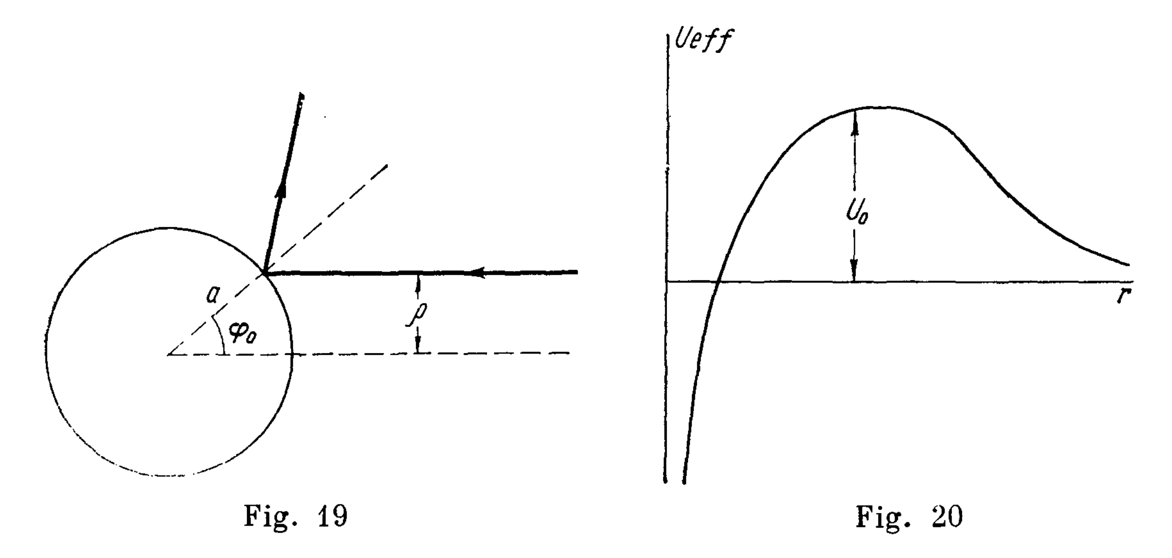


Fig. 19 Fig. 20

tes symétriques par rapport au rayon passant par le point de leur rencontre avec la bille (fig. 19). Comme on le voit d'après la figure,

$$\rho = a \sin \varphi_0 = a \sin \frac{\pi - \chi}{2} = a \cos \frac{\chi}{2}.$$

Portant dans (18,7) ou (18,8), on obtient

$$d\sigma = \frac{\pi a^2}{2} \sin \chi \quad d\chi = \frac{a^2}{4} \, d\omega, \tag{1}$$

c'est-à-dire que dans le système « c » la diffusion est isotrope. Intégrant $d\sigma$ pour tous les angles nous constatons que la section totale $\sigma = \pi a^2$, en accord avec le fait que la *surface de visée*, sur laquelle doit tomber la particule pour être diffusée, est la surface de section de la bille.

Pour passer au système « l » il nous faut exprimer χ en fonction de θ_1 d'après (17,4). Les calculs sont tout à fait analogues à ceux qui ont été effectués au problème 2, § 16 (vu la ressemblance formelle entre les formules (17,4) et (16,5)).

Pour $m_1 < m_2$ (m_1 masse de la particule, m_2 masse de la bille) on a

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{4}\left[2\frac{m_1}{m_2}\cos\theta_1 + \frac{1+\frac{m_1^2}{m_2^2}\cos 2\theta_1}{\sqrt{1-\frac{m_1^2}{m_2^2}\sin^2\theta_1}}\right]d\omega_1$$

($d\omega_1 = 2\pi\sin\theta_1 d\theta_1$). Si $m_2 > m_1$, alors

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{2}\frac{1+\frac{m_1^2}{m_2^2}\cos 2\theta_1}{\sqrt{1-\frac{m_1^2}{m_2^2}\sin^2\theta_1}}d\omega_1.$$

Pour $m_1 = m_2$ on a

$$d\sigma_1 = a^2 \mid \cos\theta_1 \mid d\omega_1,$$

ce qu'on peut obtenir en substituant directement à χ sa valeur $\chi = 2\theta_1$ (d'après (17,9)) dans (1).

Si la bille est initialement au repos, on a toujours $\chi = \pi - 2\theta_2$, et la substitution dans (1) donne

$$d\sigma_2 = a^2 \mid \cos\theta_2 \mid d\omega_2.$$

2. Exprimer dans le même cas la section efficace en fonction de l'énergie ε perdue par les particules diffusées.

Solution. L'énergie perdue par la particule m_1 est égale à l'énergie acquise par la particule m_2. D'après (17,5) et (17,7) on a:

$$\varepsilon = E_2' = \frac{2m_1^2m_2}{(m_1+m_2)^2}v_\infty^2\sin^2\frac{\chi}{2} = \varepsilon_{max}\sin^2\frac{\chi}{2},$$

d'où

$$d\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_{max}\sin\chi\, d\chi,$$

soit, en portant dans la formule (1) du problème 1,

$$d\sigma = \pi a \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_{max}}.$$

La distribution des particules diffusées suivant les valeurs de ε est donc homogène dans tout l'intervalle des valeurs de ε comprises entre 0 et ε_{max}.

3. Trouver la relation entre la section efficace et la vitesse v_∞ des particules, pour une diffusion dans un champ $U \# r^{-n}$.

Solution. Compte tenu de (10,3), si l'énergie potentielle est une fonction homogène d'ordre $k = -n$, on a pour les trajectoires semblables $\rho \# v^{-2/n}$ ou

$$\rho = v_\infty^{-2/n} f(\chi)$$

(pour des trajectoires semblables les angles de déviation sont les mêmes). Substituant dans (18,6), on trouve

$$d\sigma \# v_\infty^{-4/n}d\omega.$$

4. Déterminer la section efficace pour une « chute » de particules au centre d'un champ $U = -\alpha/r^2$.

Solution. Les particules qui « tombent » au centre sont celles pour lesquelles la condition $2\alpha > m\rho^2 v_\infty^2$ (voir (14,11)) est remplie, c'est-à-dire dont

la distance de visée ne dépasse pas la valeur $\rho_{\max} = \sqrt{2\alpha/mv_\infty^2}$. D'où la section efficace cherchée:

$$\sigma = \pi\rho_{\max}^2 = \frac{2\pi\alpha}{mv_\infty^2}.$$

5. Même problème pour un champ $U = -\alpha/r^n$ ($n > 2$, $\alpha > 0$).

Solution. La courbe de l'énergie potentielle efficace

$$U_{\text{eff}} = \frac{m\rho^2 v_\infty^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r^n}$$

en fonction de r a la forme indiquée sur la fig. 20, avec pour maximum

$$U_{\text{eff}})_{\max} \equiv U_0 = \frac{(n-2)\alpha}{2}\left(\frac{m\rho^2 v_\infty^2}{\alpha n}\right)^{\frac{n}{n-2}}.$$

Les particules qui « tombent » sur le centre sont celles pour lesquelles $U_0 < E$. En déterminant $\rho_{\max}$ à partir de la condition $U_0 = E$ on a:

$$\sigma = \pi n (n-2)^{\frac{2-n}{n}} \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^{\frac{2}{n}}.$$

6. Déterminer la section efficace pour une « chute » de particules (de masses m_1) sur la surface d'un corps sphérique (de masse m_2 et de rayon R), vers lequel elles sont attirées suivant la loi de Newton.

Solution. La condition de chute consiste dans l'inégalité $r_{\min} < R$, où $r_{\min}$ est le point de la trajectoire de la particule le plus rapproché du centre de la sphère. La valeur maximum de ρ est déterminée par la condition $r_{\min} = R$, ce qui revient à résoudre l'équation $U_{\text{eff}}(R) = E$ ou

$$\frac{m_1 v_\infty^2 \rho_{\max}^2}{2R^2} - \frac{\alpha}{R} = \frac{m_1 v_\infty^2}{2},$$

avec $\alpha = \gamma m_1 m_2$ (γ constante de gravitation), et où nous avons posé $m \simeq m_1$, considérant que $m_2 \gg m_1$. Tirant de là $\rho_{\max}^2$ on obtient

$$\sigma = \pi R^2 \left(1 + \frac{2\gamma m_2}{Rv_\infty^2}\right).$$

Lorsque $v_\infty \to \infty$, la section efficace tend évidemment vers la surface géométrique de la section de la sphère.

7. Retrouver la forme d'un champ de diffusion $U(r)$ pour une relation donnée entre la section efficace et l'angle de diffusion, l'énergie E étant donnée ; on suppose que $U(r)$ est une fonction monotone décroissante de r (champ de nesanteur), avec $U(0) > E$, $U(\infty) = 0$. (O. Firsov, 1953).

Solution. L'intégration de $d\sigma$ par rapport à l'angle de diffusion

$$\int_\chi^\pi \frac{d\sigma}{d\chi}\, d\chi = \pi\rho^2 \tag{1}$$

détermine le carré de la distance de visée, de sorte qu'on peut également considérer comme donnée la fonction $\rho(\chi)$ (et avec elle la fonction $\chi(\rho)$).

Posons:

$$s=\frac{1}{r},\quad x=\frac{1}{\rho^2},\quad w=\sqrt{1-\frac{U}{E}}\,. \tag{2}$$

Les formules (18,1) et (18,2) donnent alors

$$\frac{\pi-\chi(x)}{2}=\int_0^{s_0}\frac{ds}{\sqrt{xw^2-s^2}}\,, \tag{3}$$

où $s_0(x)$ est racine de l'équation

$$xw^2(s_0)-s_0^2=0.$$

L'équation (3) est l'équation intégrale de la fonction $w(s)$; on peut la résoudre par une méthode analogue à celle utilisée au § 12. Divisant les deux membres de (3) par $\sqrt{\alpha-x}$ et intégrant par rapport à dx de 0 à α, on trouve:

$$\int_0^{\alpha}\frac{\pi-\chi(x)}{2}\,\frac{dx}{\sqrt{\alpha-x}}=\int_0^{\alpha}\int_0^{s_0(x)}\frac{ds\,dx}{\sqrt{(xw^2-s^2)(\alpha-x)}}=$$

$$=\int_0^{s_0(\alpha)}\int_{x(s_0)}^{\alpha}\frac{dx\,ds}{\sqrt{(xw^2-s^2)(\alpha-x)}}=\pi\int_0^{s_0(\alpha)}\frac{ds}{w}\,,$$

soit, en intégrant le membre de gauche par parties:

$$\pi\sqrt{\alpha}-\int_0^{\alpha}\sqrt{\alpha-x}\,\frac{d\chi}{dx}\,dx=\pi\int_0^{s_0(\alpha)}\frac{ds}{w}\,.$$

Différentions la relation obtenue par rapport à α, et au lieu de $s_0(\alpha)$ écrivons simplement s; α sera alors remplacé par s^2/w^2. En écrivant la dernière égalité sous forme différentielle, on obtient :

$$\pi d\left(\frac{s}{w}\right)-\frac{1}{2}\,d\left(\frac{s^2}{w^2}\right)\int_0^{s^2/w^2}\frac{\chi'(x)\,dx}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2}-x}}=\frac{\pi}{w}\,ds$$

ou

$$\pi d\operatorname{Log}w=d\left(\frac{s}{w}\right)\int_0^{s^2/w^2}\frac{\chi'(x)\,dx}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2}-x}}\,.$$

Cette équation s'intègre immédiatement, mais dans le second membre on doit changer l'ordre d'intégration pour dx et $d(s/w)$. Tenant compte que pour $s=0$ (c'est-à-dire $r\to\infty$) on doit avoir $w=1$ (c'est-à-dire $U=0$), et revenant aux variables r et ρ, on obtient finalement le résultat suivant (sous deux

formes équivalentes) :

$$w = \exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int_{rw}^{\infty} \operatorname{Arch}\frac{\rho}{rw}\frac{d\chi}{d\rho}\right\} = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{rw}^{\infty}\frac{\chi(\rho)\,d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2w^2}}\right\}. \tag{4}$$

Cette formule détermine de façon implicite la fonction $w(r)$ (et par là même $U(r)$) pour tous les $r > r_{\min}$, c'est-à-dire dans le domaine des valeurs de r qui est parcouru en fait par une particule diffusée d'énergie donnée E.

§ 19. Formule de Rutherford

L'une des applications les plus importantes des formules que nous avons obtenues ci-dessus est la diffusion des particules chargées dans un champ coulombien.

En posant dans (18,4) $U = \alpha/r$ nous obtenons par une intégration élémentaire

$$\varphi_0 = \arccos\frac{\frac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\rho\right)^2}}.$$

d'où

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\operatorname{tg}^2\varphi_0,$$

soit, en posant d'après (17,1) $\varphi_0 = (\pi - \chi)/2$:

$$\rho^2 = \frac{a^2}{m^2v_\infty^4}\operatorname{ctg}^2\frac{\chi}{2}. \tag{19,1}$$

Différentions cette expression par rapport à χ et substituons dans (18,7) ou (18,8), il vient

$$d\sigma = \pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin^3\frac{\chi}{2}}\,d\chi \tag{19,2}$$

ou

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2\frac{d\omega}{\sin^4\frac{\chi}{2}}. \tag{19,3}$$

C'est ce qu'on appelle la *formule de Rutherford.* Notons que la section efficace ne dépend pas du signe de α, de sorte que le résultat obtenu est valable aussi bien pour un champ coulombien de répulsion que pour un champ d'attraction.

La formule (19,3) donne la section efficace dans un système de référence où le centre d'inertie des particules qui se heurtent

est au repos. Le passage au système du laboratoire s'effectue à l'aide de la formule (17,4). Pour des particules initialement au repos, en portant $\chi = \pi - 2\theta_2$ dans (19,2), on obtient

$$d\sigma_2 = 2\pi \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{\sin\theta_2}{\cos^3\theta_2}\, d\theta_2 = \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{d\omega_2}{\cos^3\theta_2}\,. \tag{19,4}$$

Mais pour des particules incidentes, la transformation conduit dans le cas général à une formule très compliquée. Envisageons seulement deux cas particuliers.

Si la masse m_2 de la particule diffusante est grande par rapport à la masse m_1 de la particule diffusée, $\chi \approx \theta_1$ et $m \approx m_1$ de sorte que

$$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{4E_1}\right)^2 \frac{d\omega_1}{\sin^4\frac{\theta_1}{2}}\,, \tag{19,5}$$

où $E_1 = m_1 v_\infty^2/2$ est l'énergie de la particule incidente.

Si les masses des deux particules sont identiques $\left(m_1 = m_2;\ m = \frac{m_1}{2}\right)$, on a d'après (17,9) $\chi = 2\theta_1$, ce qui, porté dans (19,2), donne :

$$d\sigma_1 = 2\pi \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\sin^3\theta_1}\, d\theta_1 = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\sin^4\theta_1}\, d\omega_1. \tag{19,6}$$

Si non seulement les masses des particules sont égales mais si les particules elles-mêmes sont identiques, il devient inutile de distinguer après la diffusion les particules initialement en mouvement des particules initialement au repos. Nous obtenons la section efficace pour toutes les particules en réunissant $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$ et en remplaçant θ_1 et θ_2 par leur valeur commune θ :

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4\theta} + \frac{1}{\cos^4\theta}\right) \cos\theta\, d\omega. \tag{19,7}$$

Revenons encore à la formule générale (19,2) et déterminons à l'aide de cette formule la distribution des particules diffusées par rapport à l'énergie qu'elles ont perdue à la suite du choc. Pour un rapport quelconque entre la masse (m_1) de la particule diffusée et celle (m_2) de la particule diffusante, la vitesse acquise par cette dernière s'exprime en fonction de l'angle de diffusion dans le système « c » par la relation

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_\infty \sin\frac{\chi}{2}$$

(voir (17,5)). Par conséquent, l'énergie acquise par cette particule, et donc perdue par la particule m_1, est égale à

$$\varepsilon = \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{2m^2}{m_2} v_\infty^2 \sin^2\frac{\chi}{2}\,.$$

Tirons de là $\sin\frac{\chi}{2}$ en fonction de ε et portons-le dans (19,2), il vient

$$d\sigma = 2\pi \frac{\alpha^2}{m_2 v_\infty^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}. \tag{19,8}$$

Cette formule répond à la question posée puisqu'elle détermine la section efficace comme fonction de la perte d'énergie ε; cette dernière prend toutes les valeurs de 0 à $\varepsilon_{\max} = \frac{2m^2 v_\infty^2}{m_2}$.

Problèmes

1. Trouver la section efficace de diffusion dans un champ $U = \alpha/r^2$ $(\alpha > 0)$.

Solution. Angle de déviation

$$\chi = \pi \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha}{m\rho^2 v_\infty^2}}} \right]$$

Section efficace

$$d\sigma = \frac{2\pi^2\alpha}{mv_\infty^2} \frac{\pi - \chi}{\chi^2 (2\pi - \chi)^2} \frac{d\omega}{\sin\chi}.$$

2. Trouver la section efficace de diffusion par une « cuvette de potentiel » sphérique de rayon a et de « profondeur » U_0 (c'est-est-à-dire un champ $U = 0$ pour $r > a$, $U = -U_0$ pour $r < a$).

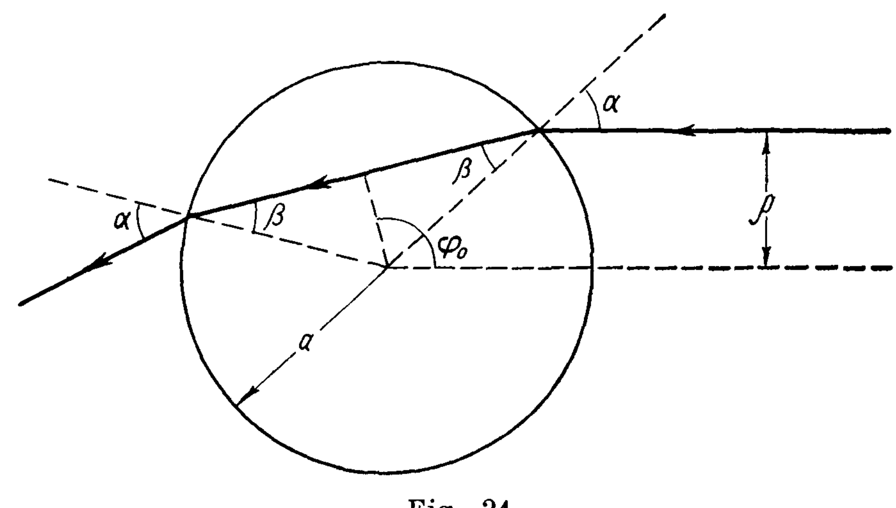


Fig. 21

Solution. La trajectoire rectiligne de la particule est « réfractée » lorsqu'elle entre dans la fosse et lorsqu'elle en sort. D'après le problème du § 7, les angles d'incidence α et de réfraction β (fig. 21) sont liés par la relation

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n, \qquad n = \sqrt{1 + \frac{2U_0}{mv_\infty^2}}.$$

L'angle de déviation est $\chi = 2(\alpha - \beta)$. On a donc

$$\frac{\sin(\alpha - \chi/2)}{\sin \alpha} = \cos\frac{\chi}{2} - \operatorname{ctg}\alpha \sin\frac{\chi}{2} = \frac{1}{n}.$$

Eliminant α de cette égalité et de la relation (évidente sur le dessin)

$$a \sin \alpha = \rho,$$

on obtient la relation entre ρ et χ sous la forme

$$\rho^2 = a^2 \frac{n^2 \sin^2 \frac{\chi}{2}}{n^2 + 1 - 2n \cos\frac{\chi}{2}}.$$

Finalement, en différentiant cette égalité, nous trouvons pour la section efficace

$$d\sigma = \frac{a^2 n^2}{4\cos\frac{\chi}{2}} \frac{\left(n\cos\frac{\chi}{2} - 1\right)\left(n - \cos\frac{\chi}{2}\right)}{\left(1 + n^2 - 2n\cos\frac{\chi}{2}\right)^2} d\omega.$$

L'angle χ varie de 0 (pour $\rho = 0$) jusqu'à la valeur $\chi_{\max}$ (pour $\rho = a$), déterminée par

$$\cos\frac{\chi_{\max}}{2} = \frac{1}{n}.$$

La section efficace totale que l'on obtient en intégrant $d\sigma$ pour tout l'angle intérieur du cône $\chi < \chi_{\max}$ est évidemment égale à la surface de la section géométrique πa^2.

§ 20. Diffusion sous de petits angles

Le calcul de la section efficace se trouve notablement simplifié si on considère seulement les chocs à grandes distances de visée, où le champ U est faible, de sorte que les angles de déviation sont petits. Dans ce cas, on peut effectuer directement le calcul dans le système du laboratoire, sans passer par le système du centre d'inertie.

Choisissons l'axe des x dans la direction de l'impulsion initiale des particules diffusées (m_1), et le plan xy dans le plan de diffusion. Soit $\mathbf{p}_1'$ l'impulsion de la particule après diffusion, nous avons l'égalité évidente

$$\sin\theta_1 = \frac{p_{1y}'}{p_1'}.$$

Pour de petites déviations on peut remplacer approximativement $\sin\theta_1$ par θ_1, et au dénominateur, p_1' par l'impulsion initiale $p_1 = m_1 v_\infty$:

$$\theta_1 \simeq \frac{p_{1y}}{m_1 v_\infty}. \tag{20,1}$$

De plus, puisque $\dot{p}_y = F_y$, l'accroissement total de l'impulsion le long de l'axe y est :

$$p'_{1y} = \int_{-\infty}^{\infty} F_y \, dt. \tag{20,2}$$

D'où la force

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{dU}{dr}\frac{y}{r}.$$

Puisque l'intégrale (20,2) contient déjà la quantité petite U, on peut, en la calculant, considérer avec la même approximation que la particule ne s'écarte pas de sa trajectoire initiale, autrement dit qu'elle est animée d'un mouvement rectiligne (le long de la droite $y = \rho$) et uniforme (avec la vitesse v_∞). Posons par conséquent dans (20,2) :

$$F_y = -\frac{dU}{dr}\frac{\rho}{r}, \qquad dt = \frac{dx}{v_\infty}$$

et nous obtenons

$$p'_{1y} = -\frac{\rho}{v_\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dU}{dr}\frac{dx}{r}.$$

Enfin, passons de l'intégration par rapport à dx à l'intégration par rapport à dr. Puisque, pour une trajectoire rectiligne $r^2 = x^2 + \rho^2$, r varie de ∞ à ρ et de nouveau à ∞ lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$. Par suite, l'intégrale par rapport à dx est remplacée par le double de l'intégrale par rapport à dr de ρ à ∞ où dx est remplacé par

$$dx = \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}.$$

Nous obtenons finalement pour l'angle de diffusion (20,1) l'expression suivante[1] :

$$\theta_1 = -\frac{2\rho}{m_1 v_\infty^2}\int_{\rho}^{\infty} \frac{dU}{dr}\frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}, \tag{20,3}$$

qui détermine la relation cherchée entre θ_1 et ρ pour une faible déviation. La section efficace de diffusion (dans le système « l »)

---

[1] Si on effectue tout le raisonnement dans le système « c », nous obtenons pour χ la même expression avec m à la place de m_1, considérant que les petits angles θ_1 et χ doivent être d'après (17,4) par

$$\theta_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\chi.$$

s'obtient par une formule identique à (18,8) (avec θ_1 à la place de χ), $\sin\theta_1$ pouvant être également ici remplacé par θ_1:

$$d\sigma = \left|\frac{d\rho}{d\theta_1}\right| \frac{\rho(\theta_1)}{\theta_1} d\omega_1. \tag{20,4}$$

Problèmes

1. Déduire la formule (20,3) de la formule (18,4).

Solution. Pour éviter des intégrales divergentes mettons la formule (18,4) sous la forme

$$\varphi_0 = -\frac{\partial}{\partial\rho} \int_{r_{\min}}^{R} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_\infty^2}}\, dr,$$

où nous avons pris comme limite supérieure R pour pouvoir ensuite passer à la limite $R \to \infty$. U étant petit, développons la racine par rapport à U et remplaçons par approximation $r_{\min}$ par ρ:

$$\varphi_0 = \int_{\rho}^{R} \frac{\rho\, dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}} + \frac{\partial}{\partial\rho} \int_{\rho}^{\infty} \frac{U(r)\, dr}{mv_\infty^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}}$$

Lorsqu'on passe à la limite $R \to \infty$, la première intégrale donne $\pi/2$. Pour la seconde, on la transforme d'abord par parties et l'on obtient l'expression

$$\chi = \pi - 2\varphi_0 = 2\frac{\partial}{\partial\rho} \int_{\rho}^{\infty} \frac{\sqrt{r^2-\rho^2}}{mv_\infty^2} \frac{dU}{dr}\, dr = -\frac{2\rho}{mv_\infty^2} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dU}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}},$$

équivalant à la formule (20,3).

2. Déterminer la section efficace de diffusion dans de petits angles, dans un champ $U = \alpha/r^n$ $(n > 0)$.

Solution. D'après (20,3) on a

$$\theta_1 = \frac{2\rho\alpha n}{m_1 v_\infty^2} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dr}{r^{n+1}\sqrt{r^2-\rho^2}}$$

En posant $\rho^2/r^2 = u$, l'intégrale se ramène à une intégrale eulérienne B et s'exprime à l'aide de fonction Γ:

$$\theta_1 = \frac{2\alpha\sqrt{\pi}}{m_1 v_\infty^2 \rho^n} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Tirant de là ρ en fonction de θ_1 et portant dans (20,4), on obtient

$$d\sigma = \frac{1}{n}\left[\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{\alpha}{m_1 v_\infty^2}\right]^{\frac{2}{n}} \theta_1^{-2\left(1+\frac{1}{n}\right)} d\omega_1.$$

PETITES OSCILLATIONS

§ 21. Oscillations linéaires libres

Il existe un type de mouvement extrêmement répandu en mécanique : ce sont les *petites oscillations* effectuées par un système au voisinage de sa position d'équilibre stable. Nous aborderons l'étude de ces mouvements avec le cas le plus simple : celui d'un système à un seul degré de liberté.

Un système est en équilibre stable quand son énergie potentielle $U(q)$ est minimum ; un écart de cette position donne naissance à une force $-dU/dq$ qui tend à ramener le système à son point de départ. Désignons par q_0 la valeur correspondante de la coordonnée généralisée. Lorsqu'on développe la différence $U(q) - U(q_0)$ par rapport à $q - q_0$ pour de petits écarts de la position d'équilibre, il suffit de garder le premier terme qui ne s'annule pas. En général ce terme est celui du second ordre

$$U(q) - U(q_0) \simeq \frac{k}{2}(q - q_0)^2,$$

où k est un coefficient positif (la valeur de la dérivée seconde $U''(q)$ pour $q = q_0$). Dans la suite nous compterons l'énergie potentielle à partir de sa valeur minimum (c'est-à-dire que nous poserons $U(q_0) = 0$) et nous désignerons par

$$x = q - q_0 \tag{21,1}$$

l'écart de la coordonnée par rapport à sa valeur d'équilibre. Ainsi,

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}. \tag{21,2}$$

Dans le cas général l'énergie cinétique d'un système à un degré de liberté est de la forme

$$\frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 = \frac{1}{2} a(q) \dot{x}^2.$$

On peut se contenter avec la même approximation de remplacer la fonction $a(q)$ par sa valeur pour $q = q_0$. Posant pour simplifier l'écriture[1]

$$a(q_0) = m,$$

nous obtenons finalement, pour la fonction de Lagrange d'un système effectuant de petites oscillations linéaires[2], l'expression suivante :

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}. \tag{21,3}$$

L'équation du mouvement correspondant à cette fonction s'écrit :

$$m\ddot{x} + kx = 0, \tag{21,4}$$

ou

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{21,5}$$

avec

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{21,6}$$

L'équation différentielle linéaire (21,5) a deux solutions indépendantes : $\cos \omega t$ et $\sin \omega t$, d'où sa solution générale

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t. \tag{21,7}$$

On peut également écrire cette expression sous la forme

$$x = a \cos (\omega t + \alpha). \tag{21,8}$$

Puisque $\cos(\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha$, la comparaison avec (21,7) montre que les constantes arbitraires a et α sont liées aux constantes c_1 et c_2 par

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{c_2}{c_1}. \tag{21,9}$$

Ainsi, au voisinage de sa position d'équilibre stable, un système effectue un mouvement oscillatoire harmonique. Le coefficient a devant le facteur périodique dans (21,8) s'appelle *amplitude* des oscillations, et l'argument du cosinus leur *phase* ; α est la valeur initiale de la phase, et dépend évidemment du choix de l'origine des temps. La grandeur ω est la *fréquence angulaire* des oscillations ; en physique théorique d'ailleurs, on l'appelle habituellement *fréquence* tout court, ce que nous ferons.

---

[1] Soulignons cependant que la grandeur m ne coïncide avec la masse que si x est la coordonnée cartésienne de la particule.

[2] On appelle souvent un tel système *oscillateur* linéaire.

La fréquence, qui ne dépend pas des conditions initiales du mouvement, est la caractéristique fondamentale des oscillations. Compte tenu de la formule (21,6) elle est complètement définie par les propriétés du système mécanique en tant que tel. Notons cependant que cette propriété de la fréquence est valable dans l'hypothèse de petites oscillations, et disparaît lorsqu'on passe à un degré d'approximation supérieur. Cela signifie du point de vue mathématique qu'elle est valable si l'énergie potentielle est fonction du carré de la coordonnée [1].

L'énergie d'un système qui effectue de petites oscillations est

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)$$

soit, en y portant (21,8)

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2. \tag{21,10}$$

Elle est proportionnelle au carré de l'amplitude des oscillations.

Il est souvent commode de représenter la relation entre la coordonnée du système oscillant et le temps par la partie réelle d'une expression complexe

$$x = \mathrm{Re}\{Ae^{i\omega t}\}, \tag{21,11}$$

où A est une constante complexe; en l'écrivant sous la forme

$$A = ae^{i\alpha}, \tag{21,12}$$

nous revenons à l'expression (21,8). La constante A est appelée *amplitude complexe*; son module coïncide avec l'amplitude ordinaire, et son argument avec la phase initiale.

Il est plus simple au point de vue mathématique d'opérer avec des facteurs exponentiels qu'avec des facteurs trigonométriques, puisque la différentiation ne change pas leur forme. Par suite, tant que nous n'effectuons que des opérations linéaires (addition, multiplication par des coefficients constants, différentiation, intégration), on peut laisser de côté la partie réelle pour n'y revenir que dans le résultat final des calculs.

Problèmes

1. Exprimer l'amplitude et la phase initiale des oscillations en fonction des valeurs initiales x_0 et v_0 de la coordonnée et de la vitesse.

Réponse:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{v_0}{\omega x_0}.$$

[1] Elle n'est, par conséquent, pas valable si pour $x = 0$ la fonction $U(x)$ a un munimum d'ordre plus élevé, c'est-à-dire $U \# (x)^n$, $n > 2$ (voir problème 2a, § 11).

2. Trouver le rapport des fréquences ω et ω' de deux molécules diatomiques composées d'atomes de divers isotopes ; les masses des atomes sont égales respectivement à m_1, m_2 et m'_1, m'_2.

Solution. Puisque les atomes des isotopes interagissent de la même façon, $k = k'$. Les masses réduites des molécules jouent donc le rôle des coefficients dans les énergies cinétiques. On a par suite, d'après (21,6)

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{m_1 m_2 (m'_1 + m'_2)}{m'_1 m'_2 (m_1 + m_2)}} .$$

3. Trouver la fréquence des oscillations d'un point de masse m, pouvant se déplacer sur une droite et fixé à un ressort dont l'autre extrémité est atta-

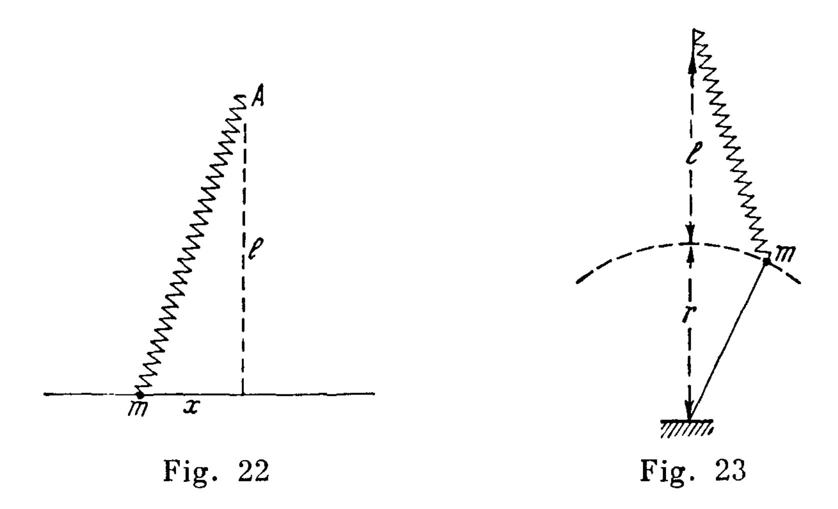


Fig. 22 Fig. 23

chée en un point A (fig. 22) à une distance l de la droite. Le ressort, quand sa longueur est égale à l, est tendu par une force F.

Solution. L'énergie potentielle du ressort est égale (aux infiniment petits d'ordre supérieur près) au produit de la force F par l'allongement δl du ressort. Pour $x \ll l$ on a

$$\delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l \approx \frac{x^2}{2l} ,$$

de sorte que $U = Fx^2/2l$. Et puisque l'énergie cinétique est $m\dot{x}^2/2$, on a

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{ml}} .$$

4. Même problème, le point m se déplaçant sur un cercle de rayon r (fig. 23).

Solution. Dans ce cas, l'allongement du ressort (pour $\varphi \ll 1$) est

$$\delta l = \sqrt{r^2 + (l+r)^2 - 2r(l+r)\cos\varphi} - l \approx \frac{r(l+r)}{2l} \varphi^2 .$$

L'énergie cinétique est $T = \frac{1}{2} mr^2\dot{\varphi}^2$. D'où la fréquence

$$\omega = \sqrt{\frac{F(r+l)}{rlm}} .$$

5. Trouver la fréquence des oscillations du pendule représenté sur la fig. 2, dont le point de suspension (de masse m_1) peut se mouvoir sur une droite horizontale.

Solution. Pour $\varphi \ll 1$ la formule obtenue au problème 3, § 14 donne

$$T = \frac{m_1 m_2 l^2}{2(m_1+m_2)}\dot{\varphi}^2, \qquad U = \frac{m_2 g l}{2}\varphi^2.$$

D'où

$$\omega = \sqrt{\frac{g(m_1+m_2)}{m_1 l}}$$

6. Déterminer la forme de la courbe le long de laquelle (dans un champ de pesanteur) un point matériel est en mouvement oscillatoire telle la fréquence des oscillations ne dépend pas de l'amplitude.

Solution. La condition imposée sera satisfaite par une courbe le long de laquelle la particule aura une énergie potentielle $U = ks^2/2$, où s est la longueur de l'arc comptée à partir de la position d'équilibre; l'énergie cinétique sera alors $T = m\dot{s}^2/2$ (m masse de la particule) et la fréquence des oscillations $\omega = \sqrt{k/m}$ indépendamment de la valeur initiale de s.

Mais dans un champ de pesanteur, $U = mgy$, où y est la coordonnée verticale. On a par suite $ks^2/2 = mgy$, soit

$$y = \frac{\omega^2}{2g}s^2.$$

D'autre part, $ds^2 = dx^2 + dy^2$ d'où :

$$x = \int \sqrt{\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 - 1}\, dy = \int \sqrt{\frac{g}{2\omega^2 y} - 1}\; dy.$$

Pour faciliter l'intégration posons :

$$y = \frac{g}{4\omega^2}(1-\cos\xi).$$

On a alors

$$x = \frac{g}{4\omega^2}(\xi + \sin\xi).$$

Ces deux égalités déterminent sous forme paramétrique l'équation de la courbe cherchée ; c'est une cycloïde.

§ 22. Oscillations forcées

Considérons maintenant les oscillations dans un système soumis à l'action d'un champ extérieur variable; on les appelle *oscillations forcées*, à la différence des oscillations dite *libres* que nous avons étudiées au paragraphe précédent. Les oscillations étant toujours supposées petites, cela sous-entend que le champ extérieur doit être suffisamment faible, sans quoi il pourrait provoquer un déplacement x trop grand.

Outre son énergie potentielle propre $\frac{1}{2}kx^2$, le système possède dans ce cas une énergie potentielle $U_e(x, t)$ due à l'action du champ

extérieur. En développant cette dernière en série par rapport à la quantité petite x, on obtient

$$U_e(x, t) \simeq U_e'(0, t) + x \left.\frac{\partial U_e}{\partial x}\right|_{x=0}.$$

Le premier terme est fonction du temps seul, et peut donc être négligé (en tant que dérivée totale par rapport à t d'une autre fonction du temps) dans la fonction de Lagrange. Dans le second terme, la dérivée $-\partial U_e/\partial x$ est la « force » extérieure agissant sur le système dans sa position d'équilibre; c'est une fonction donnée du temps que nous désignerons par $F(t)$. Ainsi, dans l'énergie potentielle apparaît le terme $-xF(t)$, de sorte que la fonction de Lagrange du système sera

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + xF(t). \tag{22,1}$$

L'équation du mouvement correspondante est

$$m\ddot{x} + kx = F(t),$$

ou

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t), \tag{22,2}$$

où nous avons de nouveau introduit la fréquence ω des oscillations libres.

Comme on le sait, la solution générale d'une équation différentielle linéaire avec second membre à coefficients constants s'obtient sous la forme d'une somme de deux expressions: $x = x_0 + x_1$, où x_0 est la solution générale de l'équation sans second membre, et x_1 une intégrale particulière de l'équation avec second membre. Dans le cas considéré x_0 représente les oscillations libres étudiées au paragraphe précédent.

Considérons le cas intéressant où la force extérieure est également une fonction périodique simple du temps, de fréquence γ:

$$F(t) = f\cos(\gamma t + \beta). \tag{22,3}$$

Cherchons l'intégrale particulière de l'équation (22,2) sous la forme $x_1 = b\cos(\gamma t + \beta)$ avec le même facteur périodique. En substituant dans l'équation, on a $b = f/m(\omega^2 - \gamma^2)$. En ajoutant la solution de l'équation sans second membre, on obtient l'intégrale générale suivante:

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}\cos(\gamma t + \beta). \tag{22,4}$$

Les constantes arbitraires a et α sont déterminées par les conditions initiales.

De cette façon, sous l'action d'une force extérieure périodique, le système effectue un mouvement qui se présente comme l'ensemble de deux oscillations, l'une avec la fréquence propre ω du système et l'autre avec la fréquence γ de la force extérieure.

La solution (22,4) n'est pas applicable au cas dit de *résonance*, où la fréquence de la force qui provoque les oscillations du système coïncide avec la fréquence propre de celui-ci. Pour trouver dans ce cas la solution générale de l'équation du mouvement, écrivons l'expression (22,4) sous la forme

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} [\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)].$$

Lorsque $\gamma \to \omega$ le deuxième terme donne une indétermination du type 0/0. Développons-la d'après la règle de L'Hospital :

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega} t \sin(\omega t + \beta). \qquad (22,5)$$

Ainsi, dans le cas de la résonance, l'amplitude des oscillations croît linéairement avec le temps (tant que les oscillations ne cessent pas d'être petites et que toute la théorie exposée reste applicable).

Montrons encore comment s'expriment les petites oscillations au voisinage de la résonance, c'est-à-dire lorsque $\gamma = \omega + \varepsilon$ où ε est petit. Ecrivons la solution générale sous la forme complexe

$$x = Ae^{i\omega t} + Be^{i(\omega+\varepsilon)t} = (A + Be^{i\varepsilon t})\, e^{i\omega t}. \qquad (22,6)$$

Puisque la quantité $A + Be^{i\varepsilon t}$ varie peu au cours d'une période $2\pi/\omega$ du facteur $e^{i\omega t}$, on peut considérer le mouvement au voisinage de la résonance comme des petites oscillations, mais à amplitude variable [1].

Soit C cette dernière, on a :

$$C = |A + Be^{i\varepsilon t}|.$$

En désignant respectivement A et B par $ae^{i\alpha}$ et $be^{i\beta}$ on obtient :

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\varepsilon t + \beta - \alpha). \qquad (22,7)$$

Ainsi, l'amplitude oscille périodiquement avec la fréquence ε et varie entre les limites

$$|a - b| \leqslant c \leqslant a + b.$$

Ce phénomène est appelé *battements*.

L'équation du mouvement (22,2) peut également être intégrée sous sa forme générale quelle que soit la force extérieure $F(t)$. Cela

---

[1] Le terme « constant » dans la phase des oscillations varie aussi.

est facile si on l'écrit au préalable sous la forme

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}+i\omega x)-i\omega(\dot{x}+i\omega x)=\frac{1}{m}F(t)$$

ou

$$\frac{d\xi}{dt}-i\omega\xi=\frac{1}{m}F(t), \qquad (22,8)$$

en introduisant la quantité complexe

$$\xi=\dot{x}+i\omega x. \qquad (22,9)$$

L'équation (22,8) n'est déjà plus du second ordre, mais du premier. Sans second membre, sa solution serait $\xi = Ae^{i\omega t}$ avec A constante. Suivant la règle générale, cherchons pour l'équation avec second membre une solution du type $\xi = A(t)\,e^{i\omega t}$; pour la fonction $A(t)$ on obtient l'équation

$$\dot{A}(t)=\frac{1}{m}F(t)\,e^{-i\omega t},$$

dont l'intégration donne pour l'équation (22,9) la solution

$$\xi=e^{i\omega t}\left\{\int\limits_0^t\frac{1}{m}F(t)\,e^{-i\omega t}\,dt+\xi_0\right\}, \qquad (22,10)$$

où la constante d'intégration ξ_0 est choisie de façon à représenter la valeur de ξ à l'instant $t = 0$. Telle est la solution générale cherchée; la fonction $x(t)$ est donnée par la partie imaginaire de l'expression (22,10) (divisée par $i\omega$) [1].

L'énergie d'un système qui effectue des oscillations forcées ne se conserve évidemment pas; le système acquiert de l'énergie aux dépens de la source de la force extérieure. Déterminons l'énergie totale transmise au système pendant tout le temps qu'agit la force (de $-\infty$ à $+\infty$), l'énergie initiale étant supposée nulle. Selon la formule (22,10) (avec $-\infty$ au lieu de zéro comme limite inférieure de l'intégrale et avec $\xi(-\infty) = 0$) on a pour $t \to \infty$:

$$|\xi(\infty)|^2=\frac{1}{m^2}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(t)\,e^{-i\omega t}\,dt\right|^2.$$

D'autre part l'énergie du système lui-même est donnée par l'expression

$$E=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\omega^2x^2)=\frac{m}{2}|\xi|^2. \qquad (22,11)$$

[1] Bien entendu, la force $F(t)$ doit être écrite ici sous sa forme réelle.

En y portant $|\xi(\infty)|^2$, nous obtenons pour l'énergie transmise la valeur

$$E = \frac{1}{2m}\left|\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{-i\omega t}\, dt\right|^2 ; \qquad (22,12)$$

elle est donc définie par le carré du module de la composante de Fourier de la force $F(t)$ avec une fréquence égale à la fréquence propre du système.

En particulier, si la force extérieure n'agit que pendant un court intervalle de temps $\left(\text{petit par rapport à } \frac{1}{\omega}\right)$ on peut poser $e^{-i\omega t} \simeq 1$. Alors

$$E = \frac{1}{2m}\left(\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, dt\right)^2 .$$

Ce résultat est évident *a priori*: il exprime le fait qu'une force de courte durée communique au système une impulsion $\int F dt$ n'ayant pas le temps de provoquer un déplacement notable.

Problèmes

1. A l'instant initial $t=0$ un système est au repos et en équilibre ($x=0$, $\dot{x}=0$). Déterminer les oscillations forcées du système, dues à une force $F(t)$, dans les cas suivants :

a) $F = \text{Cte} = F_0$.

Réponse :

$$x = \frac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos \omega t) ;$$

l'action d'une force constante conduit à un déplacement de la position d'équilibre autour de laquelle s'effectuent les oscillations.

b) $F = at$.

Réponse :

$$x = \frac{a}{m\omega^3}(\omega t - \sin \omega t).$$

c) $F = F_0 e^{-\alpha t}$.

Réponse :

$$x = \frac{F_0}{m(\omega^2 + \alpha^2)}\left(e^{-\alpha t} - \cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega}\sin \omega t\right) .$$

d) $F = F_0 e^{-\alpha t} \cos \beta t$.

Réponse :

$$x = \frac{F_0}{m\,[(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} \left\{ -(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)\cos \omega t + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha}{\omega}(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)\sin \omega t + e^{-\alpha t}\,[(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)\cos \beta t - 2\alpha\beta \sin \beta t] \right\}$$

(on trouvera cette solution plus facilement en écrivant la force sous la forme complexe $F = F_0 e^{(-\alpha+i\beta)t}$).

2. Déterminer l'amplitude finale des oscillations d'un système, après action d'une force extérieure telle que $F = 0$ pour $t < 0$, $F = F_0 t/T$ pour $0 < t < T$, $F = F_0$ pour $t > T$ (fig. 24) ; avant l'instant $t = 0$ le système se trouvait au repos et en équilibre.

Solution. Dans l'intervalle de temps $0 < t < T$, les oscillations, satisfaisant à la condition initiale, ont la forme

$$x = \frac{F_0}{mT\omega^3} (\omega t - \sin \omega t).$$

Pour $t > T$ cherchons une solution du type

$$x = c_1 \cos \omega (t - T) + c_2 \sin \omega (t - T) + \frac{F_0}{m\omega^2}.$$

De la condition de continuité de x et $\dot{x}$ pour $t = T$, on tire

$$c_1 = -\frac{F_0}{mT\omega^3} \sin \omega T,$$

$$c_2 = \frac{F_0}{mT\omega^3} (1 - \cos \omega T).$$

D'où l'amplitude des oscillations

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{2F_0}{mT\omega^3} \sin \frac{\omega T}{2}.$$

Notons qu'elle est d'autant plus petite que la « mise en jeu » de la force F_0 est plus lente (c'est-à-dire que T est plus grand).

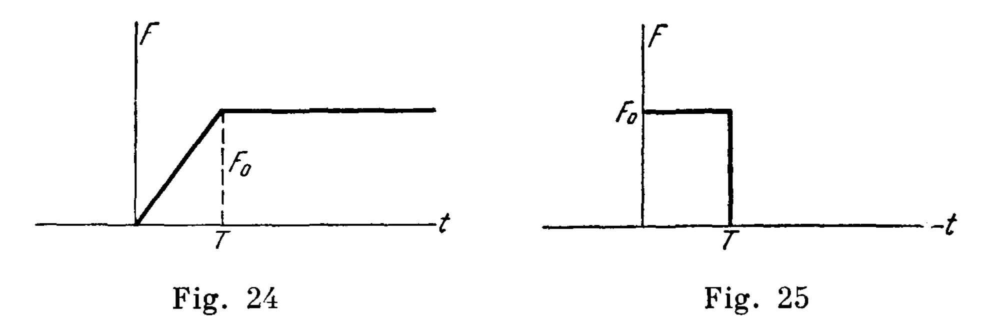


Fig. 24 Fig. 25

3. Même problème dans le cas d'une force F_0 constante agissant pendant un temps limité T (fig. 25).

Solution. On peut suivre la même méthode que dans le problème 2, mais il est plus simple d'utiliser la formule (22,10). Pour $t > T$ nous avons des oscillations libres autour de la position $x = 0$; par suite

$$\xi = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \int_0^T e^{-i\omega t}\, dt = \frac{F_0}{i\omega m} (1 - e^{-i\omega T})\, e^{i\omega t};$$

et le carré du module de ξ donne l'amplitude d'après la formule $|\xi|^2 = a^2\omega^2$ D'où finalement :

$$a = \frac{2F_0}{m\omega^2} \sin \frac{\omega T}{2}.$$

4. Même problème dans le cas d'une force agissant pendant un intervalle de temps compris entre zéro et T, et telle que $F = F_0 t/T$ (fig. 26).

Solution. On obtient de la même façon

$$a = \frac{F_0}{Tm\omega^3} \sqrt{\omega^2 T^2 - 2\omega T \sin \omega T + 2(1 - \cos \omega T)}.$$

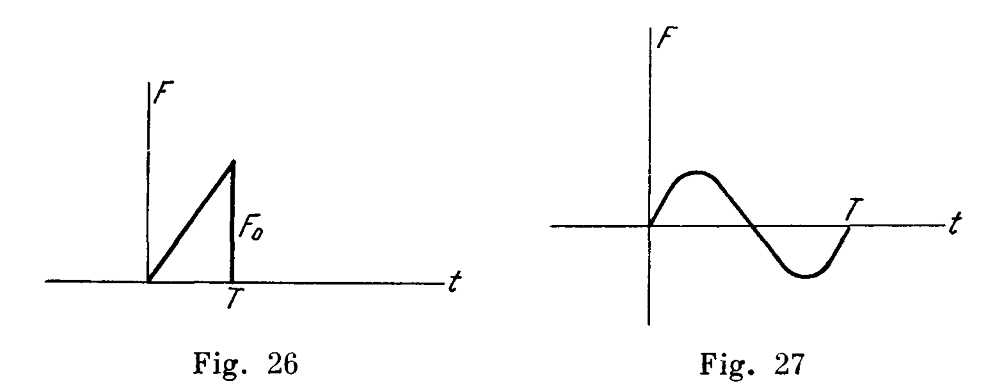


Fig. 26 Fig. 27

5. Même problème dans le cas d'une force agissant pendant un intervalle de temps compris entre zéro et $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et telle que $F = F_0 \sin \omega t$ (fig. 27).

Solution. En posant dans (22,10)

$$F(t) = F_0 \sin \omega t = \frac{F_0}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

et intégrant de zéro à T, on obtient

$$a = \frac{F_0 \pi}{m\omega^2}.$$

§ 23. Oscillations des systèmes à plusieurs degrés de liberté

La théorie des oscillations libres de systèmes à s degrés de liberté s'etablit de la même façon que pour les oscillations linéaires étudiées au § 21.

Posons que l'énergie potentielle U d'un système en fonction des coordonnées généralisées q_i ($i = 1, 2, \ldots, s$) passe par un minimum pour $q_i = q_{i0}$. Introduisons les petits déplacements

$$x_i = q_i - q_{i0} \tag{23,1}$$

et développons U par rapport aux x_i, aux infiniment petits du second ordre près ; nous obtenons l'énergie potentielle comme forme quadratique définie positive :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,k} k_{ik} x_i x_k, \tag{23,2}$$

où nous comptons de nouveau l'énergie potentielle à partir de sa valeur minimum. Puisque les coefficients k_{ik} et k_{ki} dans (23,2) sont multipliés par la même quantité $x_i x_k$, il est clair qu'on peut

toujours les considérer comme symétriques par rapport à leurs indices

$$k_{ik} = k_{ki}.$$

Pour l'énergie cinétique, qui est en général de la forme

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_k$$

(voir (5,5)), posons dans les coefficients $q_i = q_{i0}$; en désignant les constantes $a_{ik}(q_0)$ par m_{ik}, nous obtenons l'énergie cinétique comme forme quadratique définie positive

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k} m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k. \tag{23,3}$$

Les coefficients m_{ik} peuvent également être toujours considérés comme symétriques par rapport à leurs indices

$$m_{ik} = m_{ki}.$$

Ainsi, un système qui accomplit de petites oscillations libres a pour fonction de Lagrange :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k). \tag{23,4}$$

Etablissons maintenant les équations du mouvement. Pour déterminer les dérivées qu'elles renferment, écrivons la différentielle totale de la fonction de Lagrange

$$dL = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_i\, d\dot{x}_k + m_{ik} \dot{x}_k\, d\dot{x}_i - k_{ik} x_i\, dx_k - k_{ik} x_k\, dx_i).$$

Puisque la valeur de la somme ne dépend évidemment pas du choix des indices de sommation, remplaçons dans le premier et le troisième termes entre parenthèses i par k et k par i ; tenant compte de la symétrie des coefficients m_{ik} et k_{ik}, on obtient

$$dL = \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_k\, d\dot{x}_i - k_{ik} x_k\, dx_i).$$

D'où il est clair que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_k m_{ik} \dot{x}_k, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\sum_k k_{ik} x_k.$$

Les équations de Lagrange sont par conséquent

$$\sum_k m_{ik} \ddot{x}_k + \sum_k k_{ik} x_k = 0. \tag{23,5}$$

Elles constituent un système des s ($i = 1, \ldots, s$) équations différentielles linéaires sans second membre à coefficients constants.

Suivant la règle générale de résolution de ce genre d'équations, cherchons s fonctions inconnues $x_k(t)$ de la forme

$$x_k = A_k e^{i\omega t}, \tag{23,6}$$

où les A_k sont des constantes, pour le moment indéterminées. Portant (23,6) dans le système (23,5) et divisant tout par $e^{i\omega t}$, nous obtenons un système d'équations algébriques linéaires et homogènes, auxquelles doivent satisfaire les constantes A_k :

$$\sum_k (-\omega^2 m_{ik} + k_{ik}) A_k = 0. \tag{23,7}$$

Pour que ce système ait des solutions non nulles, son déterminant doit s'annuler

$$| k_{ik} - \omega^2 m_{ik} | = 0. \tag{23,8}$$

L'équation (23,8) dite *caractéristique*, est une équation de degré s par rapport à ω^2. Elle a en général s racines réelles et positives distinctes ω_α^2 ($\alpha = 1, 2, \ldots, s$) (dans certains cas particuliers quelques-unes de ces racines peuvent coïncider). Les grandeurs ω_α ainsi définies sont appelées *fréquences propres* du système.

Des considérations physiques rendent évident *a priori* le caractère réel et positif des racines de l'équation (23,8). En effet, supposons que ω ait une partie imaginaire; dans les relations (23,6) qui donnent les coordonnées x_k en fonction du temps (et par conséquent aussi les vitesses $\dot{x}_k$) on aurait alors un facteur croissant ou décroissant exponentiellement. Mais l'existence d'un tel facteur dans le cas donné est inadmissible, puisqu'elle conduirait à une variation dans le temps de l'énergie totale $E = U + T$ du système, en contradiction avec la loi de conservation de celle-ci.

On peut aboutir à la même conclusion par une méthode purement mathématique. En multipliant l'équation (23,7) par la quantité conjuguée A_i^* et sommant par rapport à i, on a

$$\sum_{i,k} (-\omega^2 m_{ik} + k_{ik}) A_i^* A_k = 0,$$

d'où

$$\omega^2 = \frac{\sum k_{ik} A_i^* A_k}{\sum m_{ik} A_i^* A_k}.$$

Les coefficients k_{ik} et m_{ik} étant réels et symétriques, les formes quadratiques au numérateur et au dénominateur de cette expres-

sion sont réelles ; en effet

$$\Big(\sum_{i,k} k_{ik} A_i^* A_k\Big)^* = \sum_{i,k} k_{ik} A_i A_k^* = \sum_{i,k} k_{ki} A_i A_k^* = \sum_{i,k} k_{ik} A_k A_i^*.$$

Elles sont essentiellement positives, et par suite ω^2 est également positif [1].

Une fois les fréquences ω_α trouvées, portons chacune d'elles dans les équations (23,7), ce qui nous donnera les valeurs correspondantes des coefficients A_k. Si toutes les racines ω_α de l'équation caractéristique sont distinctes, les coefficients A_k sont, on le sait, proportionnels aux mineurs du déterminant (23,8), dans lequel ω est remplacé par ses valeurs correspondantes ω_α ; soit $\Delta_{k\alpha}$ ces mineurs. On a par suite comme solution particulière du système (23,5)

$$x_k = \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t},$$

où C_α est une constante (complexe) arbitraire.

La solution générale est donnée par la somme des solutions particulières. Prenons la partie réelle que nous écrirons sous la forme

$$x_k = \mathrm{Re}\Big\{\sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\Big\} \equiv \sum_\alpha \Delta_{k\alpha} \Theta_\alpha, \tag{23,9}$$

où nous avons posé

$$\Theta_\alpha = \mathrm{Re}\,\{C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\}. \tag{23,10}$$

Ainsi la variation de chacune des coordonnées du système dans le temps est la superposition de s oscillations périodiques simples $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_s$ d'amplitudes et de phases arbitraires, mais de fréquences complètement déterminées.

La question se pose naturellement de savoir s'il n'est pas possible d'exprimer les coordonnées généralisées de telle façon que chacune d'elles accomplisse une seule oscillation simple. La forme même de l'intégrale générale (23,9) indique le moyen de résoudre ce problème.

En effet, en considérant les s relations (23,9) comme un système, d'équations à s inconnues Θ_α, nous pouvons, en résolvant ce système

---

[1] Le caractère défini positif de la forme quadratique construite sur les coefficients k_{ik} est évident d'après la définition de ceux-ci dans (23,2) pour les valeurs réelles des variables. Mais si on écrit les grandeurs complexes sous la forme explicite $a_k + ib_k$, nous obtenons (toujours par suite de la symétrie des k_{ik}) :

$$\sum_{i,k} k_{ik} A_i^* A_k = \sum_{i,k} k_{ik} (a_i - ib_i)(a_k + ib_k) = \sum_{i,k} k_{ik} a_i a_k + \sum_i k_{ik} b_i b_k,$$

c'est-à-dire la somme de deux formes définies positives.

exprimer les quantités $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_s$ en fonction des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Par conséquent, on peut considérer les Θ_α comme de nouvelles coordonnées généralisées. Ces coordonnées sont dites *normales* (ou principales), et les oscillations périodiques simples qu'elles effectuent sont dites oscillations normales du système.

Les coordonnées normales Θ_α obéissent, comme le montre leur définition, aux équations

$$\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0. \tag{23,11}$$

Cela signifie qu'en coordonnées normales les équations du mouvement se divisent en s équations indépendantes. L'accélération de chaque coordonnée normale ne dépend que de la valeur de cette même coordonnée, et pour déterminer celle-ci complètement en fonction du temps, il suffit de connaître sa valeur initiale et celle de la vitesse qui lui correspond. En d'autres termes, les coordonnées normales d'un système sont complètement indépendantes.

De tout cela, il résulte de façon évidente que la fonction de Lagrange exprimée en coordonnées normales se divise en une somme d'expressions dont chacune correspond à une oscillation linéaire de fréquence ω_α, c'est-à-dire prend la forme

$$L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} (\dot{\Theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha^2), \tag{23,12}$$

où les m_α sont des constantes positives. Au point de vue mathématique cela signifie que par la transformation (23,9) les deux formes quadratiques — énergie cinétique (23,3) et énergie potentielle (23,2) — se ramènent simultanément à une forme diagonale.

On choisit ordinairement les coordonnées normales de telle sorte que les coefficients des carrés des vitesses dans la fonction de Lagrange soient égaux à l'unité. Pour cela il suffit de définir les coordonnées normales (que nous désignerons maintenant par Q_α) par les égalités

$$Q_\alpha = \sqrt{m_\alpha}\, \Theta_\alpha. \tag{23,13}$$

Alors

$$L = \frac{1}{2} \sum_\alpha (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2).$$

Tout ce que nous avons dit reste à peu de chose près valable dans le cas où l'équation caractéristique compte une ou plusieurs racines multiples. La forme générale (23,9), (23,10) de l'intégrale des équations du mouvement reste la même (le nombre s des termes étant le même) avec cette seule différence que les coefficients $\Delta_{k\alpha}$ cor-

respondant aux fréquences multiples ne sont plus des mineurs du déterminant, qui, comme on le sait, s'annulent dans ce cas [1].

A chaque fréquence multiple (ou, comme on dit, *dégénérée*) correspond un nombre de coordonnées normales distinctes égal au degré de dégénérescence, mais le choix de ces coordonnées n'est pas univoque. Puisque dans l'énergie cinétique et dans l'énergie potentielle les coordonnées normales (de même ω_α) entrent sous la forme de sommes $\sum \dot{Q}_\alpha^2$ et $\sum Q_\alpha^2$ qui se transforment identiquement, on peut les soumettre à toute transformation linéaire laissant invariante la somme des carrés.

Pour des oscillations tridimensionnelles d'un point matériel situé dans un champ extérieur constant, la détermination des coordonnées normales est très simple. En plaçant l'origine des coordonnées cartésiennes au minimum de l'énergie potentielle $U(x, y, z)$, nous obtenons celle-ci comme forme quadratique des variables x, y, z; l'énergie cinétique

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

(m masse de la particule) ne dépend pas du choix de la direction des axes de coordonnées. Par suite, il suffit d'amener, par une rotation convenable des axes, l'énergie potentielle à une forme diagonale. Alors

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2), \tag{23,14}$$

et on a le long des axes x, y, z des oscillations principales de fréquences

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k_3}{m}}.$$

Dans le cas particulier d'un champ à symétrie centrale $\left(k_1 = k_2 = k_3 \equiv k,\ U = k\frac{r^2}{2}\right)$, ces trois fréquences coïncident (voir problème 3).

L'emploi des coordonnées normales donne la possibilité de ramener le problème des oscillations forcées d'un système à plusieurs degrés de liberté au problème des oscillations forcées linéaires. Comp-

[1] Le fait qu'il ne peut apparaître, dans l'intégrale générale, à côté des facteurs temporels exponentiels, de facteurs algébriques, est évident, d'après les mêmes considérations physiques qui excluent l'existence de « fréquences » complexes: la présence de tels facteurs contredirait la loi de conservation de l'énergie.

te tenu de l'action de forces extérieures variables, la fonction de Lagrange du système s'écrit

$$L = L_0 + \sum_k F_k(t)\, x_k, \tag{23,15}$$

où L_0 est la fonction de Lagrange des oscillations libres. En substituant aux coordonnées x_k les coordonnées normales on obtient

$$L = \frac{1}{2} \sum_\alpha (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + \sum_\alpha f_\alpha(t)\, Q_\alpha, \tag{23,16}$$

où

$$f_\alpha(t) = \sum_k F_k(t) \frac{\Delta_{k\alpha}}{\sqrt{m_\alpha}} .$$

Les équations du mouvement sont alors

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(t) \tag{23,17}$$

et ne contiennent chacune qu'une fonction inconnue $Q_\alpha(t)$.

Problèmes

1. Déterminer les oscillations d'un système à deux degrés de liberté si la fonction de Lagrange est

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2) + \alpha xy$$

(deux systèmes linéaires identiques de fréquence propre ω_0 liés par une interaction $-\alpha xy$).

Solution. Equations du mouvement

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha y, \qquad \ddot{y} + \omega_0^2 y = \alpha x.$$

(23,6) donne :

$$A_x(\omega_0^2 - \omega^2) = \alpha A_y, \qquad A_y(\omega_0^2 - \omega^2) = \alpha A_x. \tag{1}$$

Equation caractéristique : $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \alpha^2$, d'où

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha, \qquad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \alpha.$$

Pour $\omega = \omega_1$ les équations (1) donnent $A_x = A_y$, et pour $\omega = \omega_2$ $A_x = -A_y$. Par suite,

$$x = \frac{2}{\sqrt{2}}(Q_1 + Q_2),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - Q_2)$$

(les coefficients $1/\sqrt{2}$ correspondent à la normalisation des coordonnées indiquées dans le texte).

Pour $\alpha \ll \omega_0^2$ (liaison faible) on a :

$$\omega_1 \simeq \omega_0 - \frac{\alpha}{2}, \quad \omega_2 \simeq \omega_0 + \frac{\alpha}{2} .$$

La variation de x et y représente dans ce cas l'addition de deux oscillations de fréquences voisines, autrement dit constitue un battement de fréquence ω_2 —

$-\omega_1 = \alpha$ (voir § 22). A l'instant où l'amplitude de la coordonnée x passe par son maximum, l'amplitude de y passe par son minimum et vice versa.

2. Déterminer les petites oscillations d'un pendule double oscillant dans un plan (fig. 1).

Solution. Pour de petites oscillations ($\varphi_1 \ll 1$, $\varphi_2 \ll 1$) la fonction de Lagrange trouvée au problème 1, § 5 prend la forme

$$L = \frac{m_1+m_2}{2} l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - \frac{m_1+m_2}{2} g l_1 \varphi_1^2 - \frac{m_2}{2} g l_2 \varphi_2^2.$$

Equations du mouvement :

$$(m_1+m_2)\, l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (m_1+m_2)\, g\varphi_1 = 0,$$

$$l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 + g\varphi_2 = 0.$$

Après substitution de (23,6) :

$$A_1 (m_1+m_2)(g - l_1\omega^2) - A_2 \omega^2 m_2 l_2 = 0,$$

$$-A_1 l_1 \omega^2 + A_2 (g - l_2\omega^2) = 0.$$

Racines de l'équation caractéristique :

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2m_1 l_1 l_2}\{(m_1+m_2)(l_1+l_2) \pm$$

$$\pm \sqrt{(m_1+m_2)\,[(m_1+m_2)(l_1+l_2)^2 - 4m_1 l_1 l_2]}\}$$

Lorsque $m_1 \to \infty$, les fréquences tendent vers les limites $\sqrt{g/l_1}$ et $\sqrt{g/l_2}$ qui correspondent aux oscillations indépendantes des deux pendules.

3. Trouver la trajectoire d'une particule dans un champ central $U = kr^2/2$ (*oscillateur spatial*).

Solution. Comme dans tout champ central, le mouvement s'effectue dans un plan. Soit x, y ce plan. La variation de chaque coordonnée x, y est une oscillation simple de même fréquence $\omega = \sqrt{k/m}$;

$$x = a\cos(\omega t + \alpha), \qquad y = b\cos(\omega t + \beta)$$

ou

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\cos(\varphi + \delta) = b\cos\delta\cos\varphi - b\sin\delta\sin\varphi,$$

où on a posé $\varphi = \omega t + \alpha$, $\delta = \beta - \alpha$. Tirant de là $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ et formant la somme des carrés, on obtient l'équation de la trajectoire :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\delta = \sin^2\delta.$$

C'est une ellipse ayant pour centre l'origine des coordonnées[1]. Pour $\delta = 0$ ou π, la trajectoire dégénère en un segment de droite.

§ 24. Oscillations des molécules

Si nous avons affaire à un système de particules réagissant les unes sur les autres mais ne se trouvant pas dans un champ extérieur, tous les degrés de liberté du système n'ont pas un caractère

---

[1] Le fait que dans un champ d'énergie potentielle $U = kr^2/2$ le mouvement s'effectue suivant une courbe fermée, a déjà été rappelé au § 14.

vibratoire. Un exemple typique de tels systèmes est donné par les molécules. Outre les mouvements constitués par les oscillations des atomes autour de leur position d'équilibre à l'intérieur de la molécule, celle-ci peut effectuer elle-même des mouvements de translation et de rotation.

Au mouvement de translation correspondent trois degrés de liberté. En général, il en existe autant pour la rotation, de sorte que des $3n$ degrés de liberté d'une molécule à n atomes $3n - 6$ degrés correspondent à un mouvement vibratoire. Les molécules dans lesquelles tous les atomes sont distribués le long d'une droite font exception. Parler de rotation autour de cette droite n'a pas de sens, de sorte que les degrés de liberté correspondant au mouvement de rotation ne sont plus que deux, et on a alors $3n - 5$ degrés de liberté vibratoires.

Pour résoudre le problème mécanique des oscillations d'une molécule, il est utile d'exclure dès le début les degrés de liberté correspondant aux mouvements de translation et de rotation.

Pour éliminer le mouvement de translation, il faut poser égale à zéro l'impulsion totale de la molécule. Puisque cette condition équivaut à considérer comme immobile le centre d'inertie de la molécule, on peut l'exprimer en écrivant que les trois coordonnées de ce dernier sont constantes. En posant $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_{a0} + \mathbf{u}_a$ (où $\mathbf{r}_{a0}$ est le rayon vecteur de la position d'équilibre immobile du $a^{\text{ième}}$ atome, et $\mathbf{u}_a$ son écart à partir de cette position), écrivons la condition

$$\sum m_a \mathbf{r}_a = \text{Cte} \equiv \sum m_a \mathbf{r}_{a0}$$

sous la forme

$$\sum m_a \dot{\mathbf{u}}_a = 0. \qquad (24,1)$$

Pour éliminer la rotation de la molécule, il faut annuler son moment cinétique total. Puisque ce moment n'est pas la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction des coordonnées, la condition pour qu'il soit nul ne peut être exprimée en général en posant égale à zéro une telle fonction. Le cas des petites oscillations présente, cependant, une exception. En effet, en posant de nouveau $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_{a0} + \mathbf{u}_a$ et en négligeant les infiniment petits du second ordre par rapport aux déplacements $\mathbf{u}_a$, mettons le moment cinétique de la molécule sous la forme suivante

$$\mathbf{M} = \sum m_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a \simeq \sum m_a \mathbf{r}_{a0} \times \dot{\mathbf{u}}_a = \frac{d}{dt} \sum m_a \mathbf{r}_{a0} \times \mathbf{u}_a.$$

Avec cette approximation, il disparaîtra par conséquent si

$$\sum m_a \mathbf{r}_{a0} \times \mathbf{u}_a = 0 \qquad (24,2)$$

(l'origine des coordonnées peut ici être choisie arbitrairement).

Les oscillations normales d'une molécule peuvent être classées suivant le caractère du mouvement des atomes, en vertu de considérations liées à la symétrie de répartition des atomes dans la molécule (positions d'équilibre). Il existe à cet effet une méthode générale fondée sur l'emploi de la théorie des groupes; elle sera exposée dans un autre volume de ce cours [1]. Nous ne considérerons ici que quelques exemples élémentaires.

Si les n atomes de la molécule sont situés dans un même plan, on peut distinguer les oscillations normales qui laissent les atomes dans ce plan, et les oscillations normales pour lesquelles les atomes sortent du plan. Il est facile de déterminer le nombre des unes et des autres. Puisque pour un mouvement plan il y a en tout $2n$ degrés de liberté, dont deux de translation et un de rotation, le nombre des oscillations normales qui laissent les atomes dans le plan est égal à $2n - 3$. Les $(3n - 6) - (2n - 3) = n - 3$ autres degrés de liberté vibratoires correspondent aux oscillations pour lesquelles les atomes sortent du plan.

Dans le cas d'une molécule linéaire, on peut distinguer les oscillations longitudinales, qui conservent à la molécule sa forme rectiligne, et les oscillations qui écartent les atomes de la droite. Puisque, au mouvement de n particules sur une ligne correspondent n degrés de liberté, dont un de translation, le nombre des oscillations pour lesquelles les atomes ne sortent pas de la droite est égal à $n - 1$. Le nombre des degrés de liberté vibratoires d'une molécule linéaire étant $3n - 5$, on aura $2n - 4$ oscillations pour lesquelles les atomes sortiront de la droite. A ces oscillations cependant correspondent $n - 2$ fréquences distinctes, puisque chacune de ces oscillations peut être effectuée de deux façons indépendantes, c'est-à-dire dans deux plans perpendiculaires (passant par l'axe de la molécule); des considérations de symétrie montrent avec évidence que chaque paire d'oscillations normales ainsi obtenue a une fréquence unique.

Problèmes

1. Déterminer les fréquences des oscillations linéaires d'une molécule triatomique symétrique ABA (fig. 28). On supposera que l'énergie potentielle de la molécule ne dépend que des distances AB et BA et de l'angle $\widehat{ABA}$.

Solution. Les déplacements longitudinaux des atomes x_1, x_2, x_3 sont liés d'après (24,1) par la relation

$$m_A(x_1 + x_3) + m_B x_2 = 0.$$

[1] Voir *Mécanique quantique.*

A l'aide de celle-ci, éliminons x_2 de la fonction de Lagrange du mouvement longitudinal de la molécule :

$$L = \frac{m_A}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m_B}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{k_1}{2}[(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2],$$

puis introduisons les nouvelles coordonnées

$$Q_a = x_1 + x_3, \qquad Q_s = x_1 - x_3.$$

Nous obtenons

$$L = \frac{m_A \mu}{4m_B}\dot{Q}_a^2 + \frac{m_A}{4}\dot{Q}_s^2 - \frac{k_1 \mu^2}{4m_B^2}\dot{Q}_a^2 - \frac{k_1}{4}Q_s^2$$

($\mu = 2m_A + m_B$ masse de la molécule). On voit de là que Q_a et Q_s sont (à une normalisation près) des coordonnées normales. La coordonnée Q_a correspond

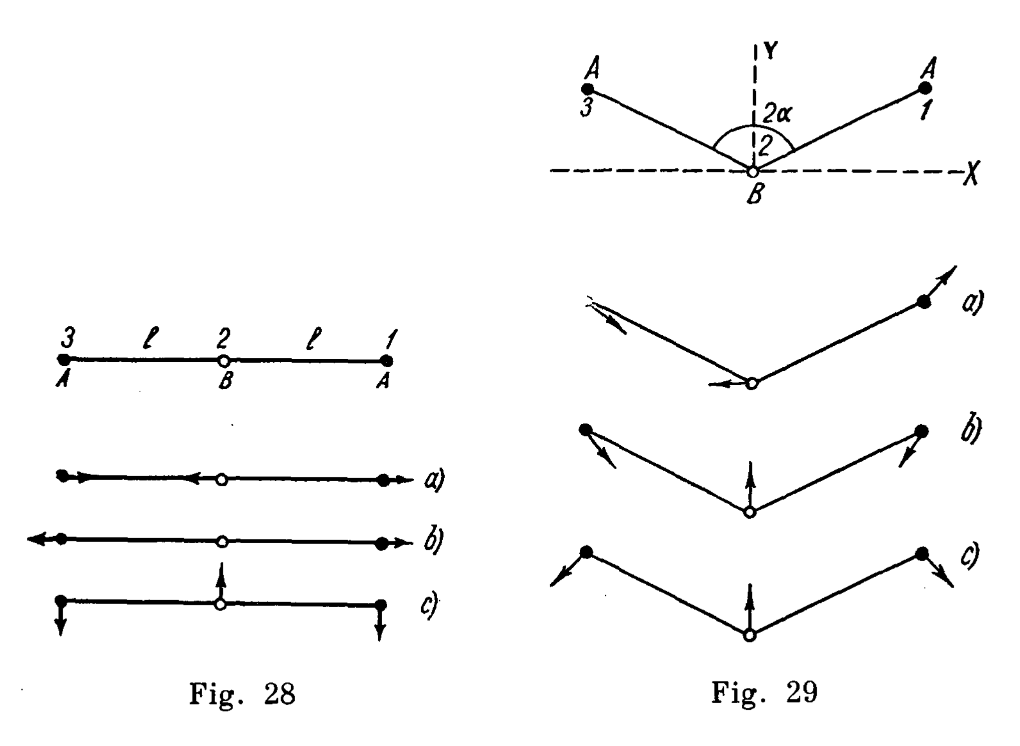


Fig. 28 Fig. 29

à une vibration antisymétrique par rapport au milieu de la molécule ($x_1 = x_3$; fig. 28,*a*) et de fréquence

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k_1 \mu}{m_A m_B}}.$$

La coordonnée Q_s correspond à une vibration symétrique ($x_1 = -x_3$; fig. 28,*b*) de fréquence

$$\omega_{s1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_A}}.$$

Les déplacements transversaux des atomes y_1, y_2, y_3 sont liés d'après (24,1) et (24,2) par les relations

$$m_A(y_1 + y_3) + m_B y_2 = 0, \quad y_1 = y_3$$

(oscillations symétriques de courbure; fig. 28,*c*). Soit $k_2 l^2 \delta^2/2$ l'énergie potentielle de courbure de la molécule, où δ est l'écart de l'angle $\widehat{ABA}$ par rapport à π; son expression en fonction du déplacement est

$$\delta = \frac{1}{l}\,[(y_1 - y_2) + (y_3 - y_2)].$$

Exprimant tous les déplacements y_1, y_2, y_3 en fonction de δ, nous obtenons la fonction de Lagrange de l'oscillation transversale sous la forme

$$L = \frac{m_A}{2}\,(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{m_B}{2}\,\dot{y}_2^2 - \frac{k_2 l^2}{2}\,\delta^2 = \frac{m_A m_B}{4\mu}\,l^2\dot{\delta}^2 - \frac{k_2 l^2}{2}\,\delta^2,$$

d'où la fréquence

$$\omega_{s2} = \sqrt{\frac{2k_2\mu}{m_A m_B}}.$$

2. Même problème pour une molécule *ABA* de forme triangulaire (fig. 29).

Solution. D'après (24,1) et (24,2) les composantes des déplacements $\mathbf{u}$ des atomes dans les directions X et Y (fig. 29) sont liés par

$$m_A\,(x_1 + x_3) + m_B x_2 = 0,$$
$$m_A\,(y_1 + y_2) + m_B y_2 = 0,$$
$$\sin\alpha\,(y_1 - y_3) - \cos\alpha\,(x_1 + x_3) = 0.$$

Les variations δl_1 et δl_2 des distances *AB* et *BA* s'obtiennent en projetant les vecteurs $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2$ sur les droites *AB* et *BA*:

$$\delta l_1 = (x_1 - x_2)\sin\alpha + (y_1 - y_2)\cos\alpha,$$
$$\delta l_2 = -(x_3 - x_2)\sin\alpha + (y_3 - y_2)\cos\alpha.$$

La variation de l'angle $\widehat{ABA}$ s'obtient en projetant les mêmes vecteurs sur les directions perpendiculaires aux segments *AB* et *BA*:

$$\delta = \frac{1}{l}\,[(x_1 - x_2)\cos\alpha - (y_1 - y_2)\sin\alpha] + \frac{1}{l}\,[-(x_3 - x_2)\cos\alpha - (y_3 - y_2)\sin\alpha].$$

Fonction de Lagrange de la molécule

$$L = \frac{m_A}{2}\,(\dot{\mathbf{u}}_1^2 + \dot{\mathbf{u}}_3^2) + \frac{m_B}{2}\,\dot{\mathbf{u}}_2^2 - \frac{k_1}{2}\,(\delta l_1^2 + \delta l_2^2) - \frac{k_2 l^2}{2}\,\delta^2.$$

Introduisons les nouvelles coordonnées

$$Q_a = x_1 + x_3, \quad q_{s1} = x_1 - x_3, \quad q_{s2} = y_1 + y_3.$$

Les composantes des vecteurs $\mathbf{u}$ s'expriment en fonction de ces coordonnées par les relations

$$x_1 = \frac{1}{2}\,(Q_a + q_{s1}), \qquad x_3 = \frac{1}{2}\,(Q_a - q_{s1}), \qquad x_2 = -\frac{m_A}{m_B}\,Q_a,$$
$$y_1 = \frac{1}{2}\,(q_{s2} + Q_a \operatorname{ctg}\alpha), \qquad y_3 = \frac{1}{2}\,(q_{s2} - Q_a \operatorname{ctg}\alpha). \qquad y_2 = -\frac{m_A}{m_B}\,q_{s2}.$$

et tous calculs faits, nous obtenons pour la fonction de Lagrange

$$L=\frac{m_A}{4}\left(\frac{2m_A}{m_B}+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\dot{Q}_a^2+\frac{m_A}{4}\dot{q}_{s1}^2+$$
$$+\frac{m_A\mu}{4m_B}\dot{q}_{s2}^2-Q_a^2\frac{k_1}{4}\left(\frac{2m_A}{m_B}+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\sin^2\alpha\right)-$$
$$-\frac{q_{s1}^2}{4}(k_1\sin^2\alpha+2k_2\cos^2\alpha)-q_{s2}^2\frac{\mu^2}{4m_B^2}(k_1\cos^2\alpha+2k_2\sin^2\alpha)+$$
$$+q_{s1}q_{s2}\frac{\mu}{2m_B}(2k_2-k_1)\sin\alpha\cos\alpha.$$

Cette relation montre que la coordonnée Q_a correspond à une oscillation normale de fréquence

$$\omega_a^2=\frac{k_1}{m_A}\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\sin^2\alpha\right),$$

antisymétrique par rapport à l'axe Y ($x_1=x_3$; $y_1=-y_3$; fig. 29,a).

Les coordonnées q_{s1} et q_{s2} correspondent ensemble à deux oscillations

Fig. 30

(symétriques par rapport à l'axe Y: $x_1=-x_3$, $y_1=y_3$; fig. 29,b et c) dont les fréquences ω_{s1} et ω_{s2} sont définies comme les racines de l'équation caractéristique du second degré par rapport à ω^2:

$$\omega^4-\omega^2\left[\frac{k_1}{m_A}\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\cos^2\alpha\right)+\frac{2k_2}{m_A}\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\sin^2\alpha\right)\right]+\frac{2\mu k_1k_2}{m_Bm_A^2}=0.$$

Pour $2\alpha=\pi$ ces fréquences coïncident avec celles qui ont été trouvées au problème 1.

3. Même problème pour une molécule linéaire asymétrique ABC (fig. 30).

Solution. Les déplacements longitudinaux (x) et transversaux (y) des atomes sont liés par les relations

$$m_Ax_1+m_Bx_2+m_Cx_3=0,\quad m_Ay_1+m_By_2+m_Cy_3=0,$$
$$m_Al_1y_1-m_Cl_2y_3.$$

Ecrivons l'énergie potentielle d'extension et de courbure sous la forme

$$\frac{k_1}{2}(\delta l_1)^2+\frac{k_1'}{2}(\delta l_2)^2+\frac{k_2l^2}{2}\delta^2$$

($2l=l_1+l_2$). Des calculs analogues à ceux du problème 1 conduisent à la valeur

$$\omega_t^2=\frac{k_2l^2}{l_1^2l_2^2}\left(\frac{l_1^2}{m_C}+\frac{l_2^2}{m_A}+\frac{4l^2}{m_B}\right)$$

pour la fréquence de l'oscillation transversale et à l'équation du second degré (par rapport à ω^2)

$$\omega^4-\omega^2\left[k_1\left(\frac{4}{m_A}+\frac{1}{m_B}\right)+k_1'\left(\frac{1}{m_B}+\frac{1}{m_C}\right)\right]+\frac{\mu k_1k_1'}{m_Am_Bm_C}=0$$

pour les fréquences ω_{l_1} et ω_{l_2} des deux oscillations longitudinales.

§ 25. Oscillations amorties

Jusqu'à présent, nous avons toujours sous-entendu que le mouvement des corps avait lieu dans le vide ou que l'influence du milieu était négligeable. Dans la réalité, lorsqu'un corps se meut dans un milieu, celui-ci offre une résistance qui tend à ralentir le mouvement. L'énergie du corps se transforme alors finalement en chaleur ou, comme on dit, se dissipe.

Le mouvement n'est plus dans ces conditions un processus purement mécanique, et son étude exige que l'on tienne compte du mouvement du milieu lui-même et de l'état thermique interne du milieu aussi bien que du corps. Notamment, on ne peut plus considérer en général que l'accélération du corps en mouvement n'est fonction que de ses coordonnées et de sa vitesse à un instant donné; autrement dit, il n'existe pas d'équations du mouvement au sens où on l'entend en Mécanique. Ainsi, le problème du mouvement d'un corps dans un milieu n'est plus un problème de Mécanique.

Il existe cependant une catégorie déterminée de cas où le mouvement dans un milieu peut être décrit approximativement à l'aide des équations de la Mécanique, en y introduisant certains termes complémentaires. C'est le cas, par exemple, des oscillations de fréquences petites par rapport aux fréquences caractérisant les processus internes de dissipation. A cette condition, on peut considérer que le corps est soumis à l'action d'une « force de frottement » dépendant seulement (pour un milieu homogène donné) de sa vitesse.

On peut en outre développer la force de frottement par rapport aux puissances de la vitesse si celle-ci est suffisamment petite. Le terme d'ordre zéro du développement est nul, puisque aucune force de frottement n'agit sur un corps immobile, et le premier terme qui ne s'annule pas est proportionnel à la vitesse. Ainsi, la force de frottement généralisée f_{fr} agissant sur un système qui effectue de petites oscillations linéaires peut s'écrire

$$f_{\text{fr}} = -\alpha\dot{x},$$

où x est la coordonnée généralisée et α un coefficient positif; le signe moins montre que la force agit dans un sens opposé à celui de la vitesse. En ajoutant cette force au second membre de l'équation du mouvement nous obtenons (voir (21,4)) :

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}. \tag{25,1}$$

Divisons cette expression par m et posons

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{\alpha}{m} = 2\lambda. \tag{25,2}$$

ω_0 est la fréquence des oscillations libres du système en l'absence de frottement. La grandeur λ est appelée *coefficient d'amortissement* [1].

Nous avons donc l'équation

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{25,3}$$

Suivant les règles générales de résolution des équations linéaires à coefficients constants, posons $x = e^{rt}$ et nous trouvons pour r l'équation caractéristique

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0,$$

d'où

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}.$$

La solution générale de l'équation (25,3) est

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}.$$

Il convient ici de distinguer deux cas.

Si $\lambda < \omega_0$, nous avons pour r deux valeurs complexes conjuguées. La solution générale de l'équation du mouvement peut alors s'écrire

$$x = \mathrm{Re}\left\{A \exp\left(-\lambda t + i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\, t\right)\right\},$$

où A est une constante arbitraire complexe. On peut écrire encore

$$x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}, \tag{25,4}$$

où a et α sont des constantes réelles. Un mouvement exprimé à l'aide de ces formules constitue ce qu'on appelle des *oscillations amorties.* Une oscillation amortie peut être considérée comme une oscillation harmonique dont l'amplitude décroît exponentiellement. La vitesse de décroissance de l'amplitude est déterminée par le coefficient λ, et la « fréquence » ω des oscillations est plus petite que celle des oscillations libres en l'absence de frottement; pour $\lambda \ll \omega_0$ la différence entre ω et ω_0 est un infiniment petit du second ordre. On pouvait s'attendre *a priori* à ce que le frottement diminue la fréquence, puisqu'en général il ralentit le mouvement.

Si $\lambda \ll \omega_0$ l'amplitude de l'oscillation amortie ne varie presque pas au cours d'une période $2\pi/\omega$. Dans ce cas, le fait de considérer la valeur moyenne (au cours d'une période) des carrés de la coordonnée et de la vitesse a un sens, en négligeant, lorsqu'on prend cette moyenne, la variation du facteur $e^{-\lambda t}$. Ces carrés moyens sont

[1] Le produit sans dimension λT ($T = 2\pi/\omega$ étant la période) est appelé décrément logarithmique de l'amortissement.

évidemment proportionnels à $e^{-2\lambda t}$. Par suite, l'énergie moyenne du système diminue suivant la formule

$$\bar{E} = E_0 e^{-2\lambda t}, \tag{25,5}$$

où E_0 est la valeur initiale.

Soit maintenant $\lambda > \omega_0$. Les deux valeurs de r sont alors réelles et toutes les deux négatives. La forme générale de la solution est

$$x = c_1 e^{-(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})\, t} + c_2 e^{-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})\, t}. \tag{25,6}$$

Nous voyons que dans ce cas, qui se rencontre si le frottement est assez important, le mouvement consiste en une décroissance de x, qui tend asymptotiquement (lorsque $t \to \infty$) vers la position d'équilibre (sans oscillation). Ce type de mouvement est appelé *amortissement apériodique.*

Enfin, dans le cas particulier où $\lambda = \omega_0$, l'équation caractéristique a une racine double $r = -\lambda$. On sait que la solution générale de l'équation différentielle est alors:

$$x = (c_1 + c_2 t)\, e^{-\lambda t}. \tag{25,7}$$

C'est un cas spécial de mouvement apériodique, qui n'a pas non plus un caractère oscillatoire.

Pour un système à plusieurs degrés de liberté, les forces de frottement généralisées correspondant aux coordonnées x_i sont des fonctions linéaires des vitesses

$$f_{i\,\text{fr}} = -\sum_k \alpha_{ik} \dot{x}_k. \tag{25,8}$$

En partant de représentations purement mécaniques, on ne peut rien dire quant aux propriétés de symétrie des coefficients α_{ik} par rapport aux indices i et k. Mais les méthodes de la physique statistique [1] permettent de montrer qu'on a toujours

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}. \tag{25,9}$$

Par suite, les expressions (25,8) peuvent être représentées comme les dérivées

$$f_{i\,\text{fr}} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \tag{25,10}$$

[1] Voir *Physique statistique.*

de la forme quadratique

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \alpha_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k, \qquad (25,11)$$

appelée *fonction de dissipation.*

Les forces (25,10) doivent être ajoutées au second membre des équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}. \qquad (25,12)$$

La fonction de dissipation possède par elle-même une signification physique importante: elle détermine l'intensité de la dissipation d'énergie dans le système. On peut s'en convaincre aisément en calculant la dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique du système. On a

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L \right) = \sum_i \dot{x}_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) = - \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}.$$

Puisque F est une fonction du second degré par rapport aux vitesses, le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes montre que la somme dans la partie droite de cette formule est égale à $2F$. Ainsi,

$$\frac{dE}{dt} = -2F, \qquad (25,13)$$

c'est-à-dire que la vitesse de variation de l'énergie du système est égale à deux fois la valeur de la fonction de dissipation. Puisque les processus de dissipation entraînent une diminution d'énergie, on doit toujours avoir $F > 0$, c'est-à-dire que la forme quadratique (25,11) est essentiellement positive.

Les équations des petites oscillations en présence de frottement s'obtiennent en ajoutant les forces (25,8) au second membre des équations (23,5):

$$\sum_k m_{ik} \ddot{x}_k + \sum_k k_{ik} x_k = -\sum_k \alpha_{ik} \dot{x}_k. \qquad (25,14)$$

Posons:

$$x_k = A_k e^{rt},$$

on obtient en divisant tout par e^{rt} le système d'équations algébriques linéaires suivant pour les constantes A_k:

$$\sum_k (m_{ik} r^2 + \alpha_{ik} r + k_{ik}) A_k = 0. \qquad (25,15)$$

Egalant à zéro le déterminant de ce système, nous trouvons l'équation caractéristique qui donne les valeurs de r:

$$|m_{ik}r^2 + \alpha_{ik}r + k_{ik}| = 0. \tag{25,16}$$

C'est une équation de degré $2s$ par rapport à r. Puisque tous ses coefficients sont réels, ses racines sont soit réelles, soit complexes conjuguées deux à deux. Les racines réelles sont toujours négatives, et les racines complexes ont une partie réelle négative. Dans le cas contraire, les coordonnées et les vitesses, et avec elles l'énergie du système, croîtraient exponentiellement avec le temps, alors que la présence de forces de dissipation entraîne une diminution de l'énergie.

§ 26. Oscillations forcées avec frottement

L'étude des oscillations entretenues en présence de frottement est tout à fait analogue à celle des oscillations sans frottement (voir § 22). Nous nous arrêterons ici en détail sur le cas particulier intéressant où la force qui provoque les oscillations est périodique.

En ajoutant au second membre de l'équation (25,1) la force extérieure $\cos \gamma t$ et en divisant par m nous obtenons l'équation du mouvement suivante:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}\cos\gamma t. \tag{26,1}$$

Il est commode de résoudre cette équation sous forme complexe; remplaçons dans le second membre $\cos\gamma t$ par $e^{i\gamma t}$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}e^{i\gamma t}.$$

Soit $x = Be^{i\gamma t}$ une intégrale particulière, on trouve pour B:

$$B = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)}. \tag{26,2}$$

Posant $B = be^{i\delta}$, il vient pour b et δ:

$$b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}, \qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2}. \tag{26,3}$$

En séparant la partie réelle de l'expression $Be^{i\gamma t} = be^{i(\gamma t + \delta)}$, nous obtenons une intégrale particulière de l'équation (26,1); en y ajoutant la solution générale de l'équation sans second membre (que nous écrivons, pour fixer les idées, dans le cas où $\omega_0 > \lambda$), nous obtenons finalement

$$x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\gamma t + \delta). \tag{26,4}$$

Le premier terme décroît exponentiellement avec le temps, de sorte qu'au bout d'un intervalle de temps assez long, il ne reste que le second terme

$$x = b\cos(\gamma t + \delta). \tag{26,5}$$

Bien que l'expression (26,3), qui donne l'amplitude b d'une oscillation forcée, croisse lorsque les fréquences γ et ω_0 se rapprochent, elle ne tend pas vers l'infini, comme c'était le cas pour la résonance en l'absence de frottement. Pour une amplitude donnée de la force f, l'amplitude des oscillations est maximum lorsque la fréquence $\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$; si $\lambda \ll \omega_0$, cette valeur ne diffère de ω_0 que par un infiniment petit du second ordre.

Considérons le domaine au voisinage de la résonance. Posons $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$, où ε est petit; on considérera aussi que $\lambda \ll \omega_0$. On peut alors écrire approximativement dans (26,2):

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = (\gamma + \omega_0)(\gamma - \omega_0) \simeq 2\omega_0\varepsilon, \quad 2i\lambda\gamma \simeq 2i\lambda\omega_0,$$

de sorte que

$$B = -\frac{f}{2m(\varepsilon - i\lambda)\omega_0} \tag{26,6}$$

ou

$$b = \frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2}}, \qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{\lambda}{\varepsilon}. \tag{26,7}$$

Notons le caractère particulier de la variation de la différence de phase δ entre l'oscillation du système et la force extérieure lorsque la fréquence de cette dernière varie. Cette diférence est toujours négative, c'est-à-dire que l'oscillation « retarde » sur la force extérieure. Loin de la résonance, pour les valeurs $\gamma < \omega_0$, δ tend vers zéro, et pour les valeurs $\gamma > \omega_0$, vers $-\pi$. La variation de δ de zéro à $-\pi$ s'effectue dans un domaine étroit de fréquences (de largeur $\simeq \lambda$), voisines de ω_0; pour $\gamma = \omega_0$ la différence de phase passe par la valeur $-\frac{\pi}{2}$. Notons ici qu'en l'absence de frottement la variation de phase de l'oscillation forcée égale à π effectue un saut pour $\gamma = \omega_0$ (le second terme dans (22,4) change de signe): le frottement « étale » ce saut.

Lorsque le mouvement est stabilisé, c'est-à-dire lorsque le système effectue les oscillations forcées (26,5) son énergie reste invariable. En même temps le système absorbe continuellement de l'énergie (aux dépens de la source de force extérieure), énergie qui est dissipée par suite du frottement. Désignons par $I(\gamma)$ la quantité d'énergie dissipée en moyenne par unité de temps en fonc-

tion de la fréquence de la force extérieure. On a d'après (25,13)

$$I(\gamma) = 2\overline{F},$$

où $\overline{F}$ est la valeur moyenne (pour une période d'oscillation) de la fonction de dissipation. Pour un mouvement linéaire l'expression (25,11) de la fonction de dissipation se ramène à $F = a\dot{x}^2/2 =$

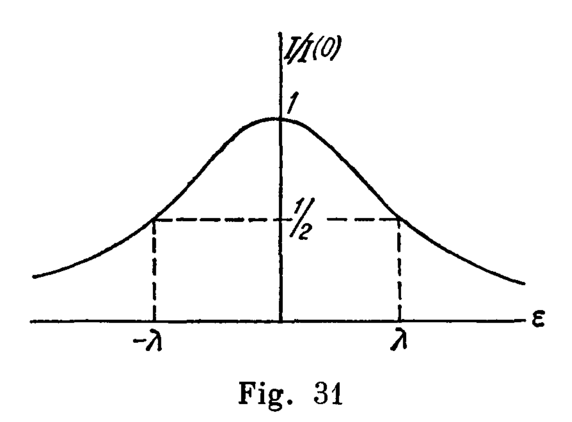


Fig. 31

$= \lambda m\dot{x}^2$. En y portant (26,5) nous obtenons

$$F = \lambda m b^2 \gamma^2 \sin^2(\gamma t + \delta).$$

La valeur moyenne par rapport au temps du carré du sinus est égale à 1/2, de sorte que

$$I(\gamma) = \lambda m b^2 \gamma^2. \tag{26,8}$$

Au voisinage de la résonance, tirant de (26,7) l'amplitude de la vibration, nous avons

$$I(\varepsilon) = \frac{f^2}{4m} \frac{\lambda}{\varepsilon^2 + \lambda^2}. \tag{26,9}$$

Cette forme de relation entre l'absorption d'énergie et la fréquence est appelée *dispersive*. La valeur de $|\varepsilon|$ pour laquelle $I(\varepsilon)$ est égale à la moitié du maximum (qui a lieu pour $\varepsilon = 0$) est appelée demi-largeur de la courbe de résonance (fig. 31). Il est clair d'après (26,9) que dans le cas donné cette largeur coïncide avec le coefficient d'amortissement λ. La hauteur du maximum

$$I(0) = \frac{f^2}{4m\lambda}$$

est inversement proportionnelle à λ. Ainsi, lorsque le coefficient d'amortissement décroît, la courbe de résonance devient plus étroite et plus haute, c'est-à-dire que son maximum devient plus aigu. Mais la surface sous la courbe de résonance reste inchangée.

Cette surface est donnée par l'intégrale

$$\int_{0}^{\infty} I(\gamma)\, d\gamma = \int_{-\omega_0}^{\infty} I(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Puisque $I(\varepsilon)$ décroît rapidement quand $|\varepsilon|$ augmente, de sorte que le domaine des $|\varepsilon|$ grands ne joue aucun rôle, on peut en intégrant écrire $I(\varepsilon)$ sous la forme (26,9) et remplacer la limite inférieure par $-\infty$. On a alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{f^2\lambda}{4m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2 + \lambda^2} = \frac{\pi f^2}{4m}. \qquad (26,10)$$

Problème

Déterminer les oscillations forcées en présence de frottement sous l'action d'une force extérieure $f = f_0 e^{\alpha t} \cos \gamma t$.

Solution. Résolvons l'équation du mouvement sous la forme complexe

$$\ddot{x} = 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m} e^{\alpha t + i\gamma t},$$

puis séparons la partie réelle de la solution. Nous obtenons comme résultat :

$$x = b e^{\alpha t} \cos(\gamma t + \delta),$$

où

$$b = \frac{f_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 + \alpha^2 - \gamma^2 + 2\alpha\lambda)^2 + 4\gamma^2 (\alpha + \lambda)^2}},$$

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{2\gamma(\alpha + \lambda)}{\omega_0^2 - \gamma^2 + \alpha^2 + 2\alpha\lambda}.$$

§ 27. Résonance paramétrique

Il existe des systèmes oscillants non fermés, pour lesquels le résultat de l'action extérieure se ramène à une variation dans le temps des paramètres du système [1].

Un système à une dimension a pour paramètres les coefficients m et k dans la fonction de Lagrange (21,3) ; s'ils dépendent du temps, l'équation du mouvement est

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0. \qquad (27,1)$$

---

[1] Exemple simple : un pendule dont le point de suspension effectue un mouvement périodique donné sur une verticale (voir problème 3).

Si nous remplaçons t par une nouvelle variable indépendante τ telle que $d\tau = dt/m(t)$ cette équation prend la forme

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + mkx = 0.$$

C'est pourquoi en fait, et sans rien enlever au caractère général des raisonnements, il suffit de considérer l'équation du mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(t)\, x = 0, \tag{27,2}$$

que l'on obtiendrait à partir de (27,1) en posant m = Cte.

La forme de la fonction $\omega(t)$ est donnée par les conditions du problème; supposons cette fonction périodique de fréquence γ (et de période $T = 2\pi/\gamma$). Cela signifie que

$$\omega(t+T) = \omega(t),$$

et par suite que toute équation du type (27,2) est invariante par rapport à la transformation $t \to t + T$. Il s'ensuit que si $x(t)$ est une solution de l'équation, la fonction $x(t+T)$ est aussi une solution. En d'autres termes, si $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont deux intégrales indépendantes de l'équation (27,2), elles se transforment linéairement l'une dans l'autre lorsqu'on remplace t par $t+T$. Ceci étant, on peut [1] choisir x_1 et x_2 de façon telle que, quand on remplace t par $t+T$, leur variation se ramène simplement à une multiplication par un facteur constant:

$$x_1(t+T) = \mu_1 x_1(t), \qquad x_2(t+T) = \mu_2 x_2(t).$$

La forme la plus générale les fonctions qui possèdent cette propriété est

$$x_1(t) = \mu_1^{t/T}\Pi_1(t), \qquad x_2(t) = \mu_2^{t/T}\Pi_2(t), \tag{27,3}$$

où $\Pi_1(t)$ et $\Pi_2(t)$ sont des fonctions purement périodiques du temps (de période T).

Les constantes μ_1 et μ_2 dans ces fonctions doivent être liées par une relation déterminée. En effet, en multipliant les équations

$$\ddot{x}_1 + \omega^2(t)\, x_1 = 0, \qquad \ddot{x}_2 + \omega^2(t)\, x_2 = 0$$

respectivement par x_2 et x_1 et en les retranchant membre à membre l'une de l'autre, on a:

$$\ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 = \frac{d}{dt}(\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2) = 0$$

[1] Dans la mesure où les constantes μ_1 et μ_2 ne coïncident pas.

ou

$$\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2 = \text{Cte}. \tag{27,4}$$

Mais pour des fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ quelconques du type (27,3), le membre de gauche de cette égalité se trouve multiplié par $\mu_1\mu_2$ lorsqu'on remplace l'argument t par T. Par suite, pour que l'égalité (27,4) soit satisfaite dans tous les cas, il faut évidemment que

$$\mu_1\mu_2 = 1. \tag{27,5}$$

On peut tirer d'autres conclusions sur les constantes μ_1 et μ_2 en partant du fait que les coefficients de l'équation (27,2) sont réels. Si $x(t)$ est une intégrale de cette équation, la fonction complexe conjuguée $x^*(t)$ doit satisfaire à cette même équation. Il s'ensuit que le couple de constantes μ_1, μ_2 doit coïncider avec le couple μ_1^*, μ_2^*, c'est-à-dire que l'on doit avoir soit $\mu_1 = \mu_2^*$, soit μ_1 et μ_2 réels. Dans le premier cas, compte tenu de (27,5), nous avons $\mu_1 = 1/\mu_1^*$, c'est-à-dire $|\mu_1|^2 = |\mu_2|^2 = 1$; les modules des constantes μ_1 et μ_2 sont égaux à l'unité.

Dans le second cas, les deux intégrales indépendantes de l'équation (27,2) sont de la forme

$$x_1(t) = \mu^{t/T}\Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu^{-t/T}\Pi_2(t), \tag{27,6}$$

où μ est un nombre réel positif ou négatif différant de l'unité. L'une de ces fonctions (la première ou la deuxième selon que $|\mu| > 1$ ou $|\mu| < 1$) croît exponentiellement avec le temps. Cela signifie que l'état de repos du système (dans la position d'équilibre $x = 0$) sera instable: il suffira d'un écart de cette position aussi faible que l'on veut pour provoquer un déplacement x croissant très rapidement avec le temps. Ce phénomène est appelé *résonance paramétrique.*

Soulignons en passant que si x et $\dot{x}$ ont initialement des valeurs strictement nulles, ils resteront nuls, ce qui n'est pas le cas dans la résonance ordinaire (§ 22), où le déplacement croît avec le temps (proportionnellement à t) même si sa valeur initiale est égale à zéro.

Dégageons les conditions dans lesquelles apparaît la résonance paramétrique pour le cas important où la fonction $\omega(t)$ diffère peu d'une valeur constante ω_0 et est une fonction périodique simple

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h\cos\gamma t), \tag{27,7}$$

où la constante $h \ll 1$ (nous considérons h comme positif, ce qu'on peut toujours obtenir par un choix judicieux de l'origine du temps). Comme nous le verrons plus bas, la résonance paramétrique apparaît avec une intensité maximum lorsque la fréquence de la fonction

$\omega(t)$ est voisine du double de la fréquence ω_0. Posons donc:

$$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon,$$

où $\varepsilon \ll \omega_0$.

Nous chercherons la solution de l'équation du mouvement [1]

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + h \cos(2\omega_0 + \varepsilon) t] x = 0 \qquad (27,8)$$

sous la forme

$$x = a(t) \cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t + b(t) \sin\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t, \qquad (27,9)$$

où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions du temps qui varient lentement (par comparaison avec les facteurs cos et sin). Sous cette forme la solution n'est évidemment pas exacte. En réalité, la fonction $x(t)$ contient également des termes dont les fréquences diffèrent de $\omega_0 + \varepsilon/2$ par un multiple entier de $2\omega_0 + \varepsilon$; ces termes sont, cependant, des infiniment petits d'ordre supérieur par rapport à h, et on peut les négliger en première approximation (voir problème 1).

Portons (27,9) dans (27,8) et effectuons les calculs en ne conservant que les termes du premier ordre par rapport à ε. Supposons en même temps que $\dot{a} \simeq \varepsilon a$, $\dot{b} \simeq \varepsilon b$ (la validité de cette hypothèse dans les conditions de la résonance sera confirmée par le résultat). Les produits de facteurs trigonométriques doivent être développés sous forme de sommes

$$\cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t \cdot \cos(2\omega_0 + \varepsilon) t =$$

$$= \frac{1}{2} \cos\left(3\omega_0 + \frac{3\varepsilon}{2}\right) t + \frac{1}{2} \cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t$$

etc., et conformément à ce qui a été dit plus haut, on doit laisser de côté les termes de fréquences $3(\omega_0 + \varepsilon/2)$. Nous obtenons finalement

$$-\left(2\dot{a} + b\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2} b\right) \omega_0 \sin\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t +$$

$$+ \left(2\dot{b} - a\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2} a\right) \omega_0 \cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t = 0.$$

Cette égalité est valable à condition que les coefficients de chacun des facteurs sin et cos s'annulent simultanément. Nous obtenons par conséquent un système de deux équations différentielles linéai-

---

[1] Une équation de ce type (avec γ et h arbitraires) est appelée en physique mathématique équation de Mathieu.

res pour les fonctions $a(t)$ et $b(t)$. Suivant la règle générale, cherchons une solution proportionnelle à e^{st}. On a alors

$$sa + \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2}\right) b = 0,$$

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon - \frac{h\omega_0}{2}\right) a - sb = 0,$$

et, pour que l'on puisse résoudre simultanément ces deux équations, il faut que:

$$s^2 = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - \varepsilon^2\right]. \tag{27,10}$$

La condition de résonance paramétrique est que s soit réel (c'est-à-dire $s^2 > 0$)[1]. Ainsi, la résonance paramétrique a lieu dans l'intervalle

$$-\frac{h\omega_0}{2} < \varepsilon < \frac{h\omega_0}{2} \tag{27,11}$$

autour de la fréquence $2\omega_0$ [2]. La largeur de cet intervalle est proportionnelle à h et du même ordre de grandeur que les valeurs du coefficient d'amplification des oscillations s dans l'intervalle.

La résonance paramétrique a lieu également pour des fréquences γ de variation du paramètre du système voisines de valeurs telles que $2\omega_0/n$, où n est un nombre entier quelconque. Cependant, quand n croît, la largeur des domaines de résonance (domaines d'instabilité) diminue rapidement, comme h^n (voir problème 2). La valeur du coefficient d'amplification des oscillations diminue également à l'intérieur de ceux-ci.

Le phénomène de résonance paramétrique existe aussi en présence d'un faible frottement dans le système, mais le domaine d'instabilité se rétrécit alors quelque peu. Comme nous l'avons vu au § 25, le frottement entraîne un amortissement de l'amplitude des oscillations en $e^{-\lambda t}$. Par suite, l'amplification des oscillations dans le cas de résonance paramétrique suit une loi en $e^{(s-\lambda)t}$ (avec s positif donné par la solution du problème sans frottement), et la limite du domaine d'instabilité est déterminée par l'égalité $s - \lambda = 0$. Ainsi, en tirant s de (27,10), nous obtenons pour le domaine de

---

[1] La constante μ dans (27,6) est liée à s par la relation $\mu = -e^{s\pi/\omega_0}$ (lorsqu'on remplace t par $t + 2\pi/2\omega_0$ les cos et sin dans (27,9) changent de signe).

[2] Si on s'intéresse seulement aux frontières du domaine de résonance (et non à l'expression de s dans celui-ci), on peut simplifier les calculs en remarquant que sur ces frontières $s = 0$, c'est-à-dire que les coefficients a et b dans (27,9) sont constants; nous trouvons alors tout de suite les valeurs $\varepsilon = \pm h\omega_0/2$ correspondant aux frontières du domaine (27,11).

résonance, au lieu de (27,11), l'inégalité:

$$-\sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2-4\lambda^2}<\varepsilon<\sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2-4\lambda^2}\,. \qquad (27,12)$$

Ceci étant, soulignons que la résonance n'est pas possible pour une amplitude h aussi petite que l'on veut, mais seulement pour une amplitude supérieure à un « seuil » h_k déterminé, égal dans le cas de (27,2) à

$$h_k=\frac{4\lambda}{\omega_0}\,.$$

On peut montrer que, pour des résonances au voisinage des fréquences $2\omega_0/n$, la valeur du seuil h_k est proportionnelle à $\lambda^{1/n}$, c'est-à-dire croît avec n.

Problèmes

1. Déterminer jusqu'aux grandeurs de l'ordre de h^2 les frontières du domaine d'instabilité, la résonance ayant lieu au voisinage de $\gamma = 2\omega_0$.

Solution. Cherchons pour l'équation (27,8) une solution du type

$$x=a_0\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+b_0\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+$$
$$+a_1\cos 3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+b_1\sin 3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t,$$

où l'on tient compte également (contrairement à (27,9)) des termes d'ordre suivant par rapport à h. Comme nous ne nous intéressons qu'aux limites du domaine d'instabilité, nous considérerons les coefficients a_0, b_0, a_1, b_1 comme constants (voir note 2, p. 115). Développons en sommes les produits de fonctions trigonométriques pour les porter dans l'équation (27,8), en laissant de côté les termes de fréquences $5\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ qui ne seraient nécessaires que pour une approximation supérieure. Nous obtenons:

$$\left[-a_0\left(\omega_0\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)+\frac{h\omega_0^2}{2}a_0+\frac{h\omega_0^2}{2}a_1\right]\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+$$
$$+\left[-b_0\left(\omega_0\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)-\frac{h\omega_0^2}{2}b_0+\frac{h\omega_0^2}{2}b_1\right]\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+$$
$$+\left[\frac{h\omega_0^2}{2}a_0-8\omega_0^2a_1\right]\cos 3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+$$
$$+\left[\frac{h\omega_0^2}{2}b_0-8\omega_0^2b_1\right]\sin 3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t=0.$$

Dans les termes de fréquences $\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}$ on a gardé les infiniment petits du premier et du second ordre, et dans les termes de fréquences $3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)$, ceux

du premier ordre. Chacune des expressions entre crochets doit s'annuler séparément. Les deux dernières donnent :

$$a_1=\frac{h}{16}a_0, \qquad b_1=\frac{h}{16}b_0,$$

et les deux premières :

$$\omega_0\varepsilon \pm \frac{h\omega_0^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4}-\frac{h^2\omega_0^2}{32}=0.$$

En résolvant cette équation jusqu'aux termes de l'ordre de h^2, nous obtenons les valeurs limites de ε cherchées

$$\varepsilon=\pm\frac{h\omega_0}{2}-\frac{1}{32}h^2\omega_0.$$

2. Déterminer les limites du domaine d'instabilité pour une résonance au voisinage de $\gamma=\omega_0$.

Solution. En écrivant $\gamma=\omega_0+\varepsilon$, nous obtenons l'équation du mouvement

$$\ddot{x}+\omega_0^2\,[1+h\cos(\omega_0+\varepsilon)\,t]\,x=0.$$

Compte tenu que les valeurs limites cherchées sont peu différentes de h^2 ($\varepsilon \simeq h^2$), cherchons une solution du type

$$x = a_0\cos(\omega_0+\varepsilon)\,t+b_0\sin(\omega_0+\varepsilon)\,t+a_1\cos 2(\omega_0+\varepsilon)\,t+b_1\sin 2(\omega_0+\varepsilon)\,t+c_1,$$

où l'on tient compte à la fois des termes des deux premiers ordres. Pour déterminer les frontières du domaine d'instabilité, considérons à nouveau les coefficients comme constants, et nous obtenons :

$$\left[-2\omega_0\varepsilon a_0+\frac{h\omega_0^2}{2}a_1+h\omega_0^2c_1\right]\cos(\omega_0+\varepsilon)\,t+$$
$$+\left[-2\omega_0\varepsilon b_0+\frac{h\omega_0^2}{2}b_1\right]\sin(\omega_0+\varepsilon)\,t+$$
$$+\left[-3\omega_0^2a_1+\frac{h\omega_0^2}{2}a_0\right]\cos 2(\omega_0+\varepsilon)\,t+$$
$$+\left[-3\omega_0^2b_1+\frac{h\omega_0^2}{2}b_0\right]\sin 2(\omega_0+\varepsilon)\,t+\left[c_1\omega_0^2+\frac{h\omega_0^2}{2}a_0\right]=0.$$

D'où on tire

$$a_1=\frac{h}{6}a_0, \qquad b_1=\frac{h}{6}b_0, \qquad c_1=-\frac{h}{2}a_0,$$

et finalement les deux limites

$$\varepsilon=-\frac{5}{24}h^2\omega_0, \qquad \varepsilon=-\frac{1}{24}h^2\omega_0.$$

3. Trouver les conditions de résonance paramétrique pour les petites oscillations d'un pendule plan dont le point de suspension oscille sur une verticale.

Solution. La fonction de Lagrange, trouvée au problème 3, *c*, § 5 donne pour des petites oscillations ($\varphi \ll 1$) l'équation du mouvement

$$\ddot{\varphi}+\omega_0^2\left(1+4\frac{a}{l}\cos(2\omega_0+\varepsilon)\,t\right)\varphi=0$$

(où $\omega_0^2=g/l$). Il est clair que le rapport $4a/l$ joue le rôle du paramètre

h introduit dans le texte. La condition (27,11), par exemple, prend la forme

$$|\varepsilon| < \frac{2a\sqrt{g}}{l^{3/2}}.$$

§ 28. Oscillations anharmoniques

Toute la théorie des petites oscillations exposée plus haut est fondée sur un développement des énergies potentielle et cinétique du système par rapport aux coordonnées et aux vitesses où ne sont conservés que les termes du second ordre ; les équations du mouvement sont donc linéaires, et c'est ce qui nous a permis dans cette approximation de parler d'oscillations *linéaires*. Bien que ce développement soit tout à fait légitime lorsque les amplitudes des oscillations sont suffisamment petites, le fait de tenir compte des approximations suivantes (c'est-à-dire de l'*anharmonicité* ou *non-linéarité* des oscillations) conduit cependant à l'apparition de particularités du mouvement qui, quoique faibles, sont qualitativement nouvelles.

Effectuons le développement de la fonction de Lagrange jusqu'aux termes du troisième ordre. Dans l'énergie potentielle apparaissent alors des termes du troisième degré par rapport aux coordonnées x_i, et dans l'énergie cinétique, des termes contenant des produits des vitesses et des coordonnées de la forme $\dot{x}_i\dot{x}_k x_l$; cette différence avec l'expression (23,3) est liée au fait que nous gardons des termes du premier ordre par rapport à x dans le développement des fonctions $a_{ik}(q)$. De la sorte, la fonction de Lagrange prendra la forme

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k - k_{ik}x_i x_k) + \frac{1}{2}\sum_{i,k,l} n_{ikl}\dot{x}_i\dot{x}_k x_l - \frac{1}{3}\sum_{i,k,l} l_{ikl}x_i x_k x_l, \tag{28,1}$$

où les n_{ikl}, l_{ikl} sont de nouveaux coefficients constants.

Si on passe des coordonnées quelconques x_i aux coordonnées normales Q_α (approximation linéaire), par suite du caractère linéaire de cette transformation, la troisième et la quatrième somme dans (28,1) se transformeront en des sommes analogues où les Q_α et $\dot{Q}_\alpha$ remplaceront les coordonnées x_i et les vitesses $\dot{x}_i$. En désignant par $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ et $\mu_{\alpha\beta\gamma}$ les coefficients dans ces sommes, nous obtenons pour la fonction de Lagrange

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}(\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\lambda_{\alpha\beta\gamma}\dot{Q}_\alpha\dot{Q}_\beta Q_\gamma - \frac{1}{3}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\mu_{\alpha\beta\gamma}Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma. \tag{28,2}$$

Nous n'allons pas écrire toutes les équations du mouvement qui découlent de cette fonction de Lagrange. L'essentiel est qu'elles sont de la forme

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha (Q, \dot{Q}, \ddot{Q}), \tag{28,3}$$

où les f_α sont des fonctions homogènes du second ordre des coordonnées Q et de leurs dérivées par rapport au temps.

Appliquant la méthode des approximations successives, cherchons pour ces équations une solution du type

$$Q_\alpha = Q_\alpha^{(1)} + Q_\alpha^{(2)}, \tag{28,4}$$

où $Q_\alpha^{(2)} \ll Q_\alpha^{(1)}$ et où les fonctions $Q_\alpha^{(1)}$ satisfont aux équations « non perturbées »

$$\ddot{Q}_\alpha^{(1)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(1)} = 0,$$

c'est-à-dire représentant des oscillations harmoniques ordinaires

$$Q_\alpha^{(1)} = a_\alpha \cos (\omega_\alpha t + \alpha_\alpha). \tag{28,5}$$

Pour l'approximation suivante, en ne conservant dans le second membre des équations (28,3) que les termes du second ordre, nous obtenons pour les $Q_\alpha^{(2)}$ les équations

$$\ddot{Q}_\alpha^{(2)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(2)} = f_\alpha (Q^{(1)}, \dot{Q}^{(1)}, \ddot{Q}^{(1)}), \tag{28,6}$$

dans le second membre desquelles doivent être portées les expressions (28,5). Au total, nous obtenons des équations différentielles linéaires non homogènes, dont on peut transformer le second membre en sommes de fonctions périodiques simples. Ainsi par exemple

$$Q_\alpha^{(1)} Q_\beta^{(1)} = a_\alpha a_\beta \cos (\omega_\alpha t + \alpha_\alpha) \cos (\omega_\beta t + \alpha_\beta) =$$

$$= \frac{1}{2} a_\alpha a_\beta \{\cos [(\omega_\alpha + \omega_\beta) t + \alpha_\alpha + \alpha_\beta] + \cos [(\omega_\alpha - \omega_\beta) t + \alpha_\alpha - \alpha_\beta]\}.$$

Ainsi, dans les seconds membres des équations (28,6), on trouve des termes correspondant à des oscillations de fréquences égales aux sommes et aux différences des fréquences propres du système. Il faut chercher la solution de ces équations sous une forme qui contienne les mêmes facteurs périodiques, et nous arriverons à la conclusion que, dans la seconde approximation, aux oscillations normales du système, de fréquences ω_α, se superposent des oscillations supplémentaires de fréquences

$$\omega_\alpha \pm \omega_\beta \tag{28,7}$$

(en particulier les fréquences doubles $2\omega_\alpha$ et la fréquence 0 correspondant à un déplacement constant). Ces fréquences sont dites

combinatoires. Les amplitudes des oscillations combinatoires sont proportionnelles aux produits $a_\alpha a_\beta$ (ou aux carrés a_α^2) correspondant aux oscillations normales.

Dans les approximations suivantes, où l'on tient compte des termes d'ordre plus élevé dans le développement de la fonction de Lagrange, il apparaît des oscillations combinatoires dont les fréquences sont des sommes et des différences d'un plus grand nombre de fréquences ω_α. De plus, on voit apparaître également un nouveau phénomène.

En effet, dès l'approximation du 3e ordre, on trouve, parmi les fréquences combinatoires, des fréquences qui coïncident avec les premières fréquences ω_α (c'est-à-dire $\omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\beta$). En appliquant la méthode décrite plus haut au second membre des équations du mouvement, on aura par suite des termes de résonance qui feront apparaître dans la solution des termes dont l'amplitude croîtra avec le temps. Cependant, il est physiquement évident que dans un système fermé, en l'absence de sources extérieures d'énergie, il ne peut se produire d'accroissement spontané de l'intensité des vibrations.

En fait, dans les approximations supérieures, il y a variation des fréquences fondamentales ω_α par rapport à leurs valeurs non perturbées $\omega_\alpha^{(0)}$ qui figurent dans l'expression quadratique de l'énergie potentielle. L'apparition de termes croissants dans la solution est liée à un développement du type

$$\cos(\omega_\alpha^{(0)} + \Delta\omega_\alpha)\, t \simeq \cos \omega_\alpha^{(0)} t - t\Delta\omega_\alpha \sin \omega_\alpha^{(0)} t,$$

évidemment illégitime lorsque t est assez grand.

C'est pourquoi lorsqu'on passe aux approximations suivantes, la méthode des approximations successives doit être modifiée de telle sorte que les facteurs périodiques qui figurent dans la solution contiennent dès le début des valeurs exactes, et non approchées, des fréquences. Les variations des fréquences sont elles-mêmes déterminées, dans la solution des équations, justement par la condition qu'il n'y ait pas de termes de résonance.

Appliquons cette méthode à des oscillations anharmoniques à un degré de liberté; écrivons la fonction de Lagrange:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2}{2} x^2 - \frac{m\alpha}{3} x^3 - \frac{m\beta}{4} x^4. \tag{28,8}$$

L'équation du mouvement correspondante est:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3. \tag{28,9}$$

Nous allons chercher sa solution sous forme d'une série d'approximations successives

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)},$$

où

$$x^{(1)} = a \cos \omega t \qquad (28,10)$$

avec une valeur exacte pour ω que nous chercherons ensuite elle-même sous forme d'une série $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \ldots$ (on peut toujours, par un choix judicieux de l'origine du temps, annuler la phase initiale dans $x^{(1)}$). Cependant, la forme (28,9) de l'équation du mouvement ne convient pas parfaitement, car lorsqu'on y porte (28,10), le premier membre ne devient pas strictement nul. Nous écrirons donc d'abord cette équation sous la forme équivalente

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3 - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \ddot{x}. \qquad (28,11)$$

Posant ici $x = x^{(1)} + x^{(2)}$, $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)}$ et négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, nous obtenons pour $x^{(2)}$ l'équation

$$\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -\alpha a^2 \cos^2 \omega t + 2\omega_0 \omega^{(1)} a \cos \omega t =$$
$$= -\frac{\alpha a^2}{2} - \frac{\alpha a^2}{2} \cos 2\omega t + 2\omega_0 \omega^{(1)} a \cos \omega t.$$

La condition imposée qu'il n'y ait pas de terme de résonance dans le second membre donne simplement $\omega^{(1)} = 0$, en accord avec la méthode de recherche de la deuxième approximation exposée au début de ce paragraphe. Nous pouvons maintenant résoudre de la façon habituelle cette équation linéaire non homogène, ce qui nous donne

$$x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2} \cos 2\omega t. \qquad (28,12)$$

Ensuite, posant dans (28,11) $x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}$, $\omega = \omega_0 + \omega^{(2)}$, nous obtenons pour $x^{(3)}$ l'équation

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = -2\alpha x^{(1)} x^{(2)} - \beta x^{(1)3} + 2\omega_0 \omega^{(2)} x^{(1)}$$

soit, en portant dans le second membre les expressions (28,10) et (28,12), après une transformation simple :

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = a^3 \left[\frac{\beta}{4} - \frac{\alpha^2}{6\omega_0^2}\right] \cos 3\omega t +$$
$$+ a \left[2\omega_0 \omega^{(2)} + \frac{5a^2\alpha^2}{6\omega_0^2} - \frac{3}{4} a^2 \beta\right] \cos \omega t.$$

En égalant à 0 le coefficient du facteur de résonance $\cos \omega t$ nous trouvons une correction de la fréquence fondamentale proportionnelle au carré de l'amplitude de la vibration :

$$\omega^{(2)} = \left(\frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}\right) a^2. \qquad (28,13)$$

L'oscillation combinatoire est donc du 3e ordre:

$$x^{(3)} = \frac{a^3}{16\omega_0^2}\left(\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} - \frac{\beta}{2}\right)\cos\omega t. \tag{28,14}$$

§ 29. Résonance dans les oscillations non linéaires

Les termes anharmoniques dans les oscillations forcées d'un système entraînent l'apparition de propriétés essentiellement nouvelles dans les phénomènes de résonance.

En ajoutant au second membre de l'équation (28,9) une force extérieure périodique (de fréquence γ) on obtient:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}\cos\gamma t - \alpha x^2 - \beta x^3, \tag{29,1}$$

où on a écrit également la force de frottement, de coefficient d'amortissement λ (qui sera plus bas supposé petit). Strictement parlant, lorsqu'on tient compte des termes non linéaires dans l'équation des oscillations libres, on doit également considérer les termes d'ordres supérieurs dans l'amplitude de la force extérieure, termes qui correspondent à une dépendance possible de celle-ci à l'égard du déplacement x. Si nous n'écrivons pas ces termes, c'est dans le seul but de simplifier les formules; en effet, ils ne changent pas l'aspect qualitatif des phénomènes.

Soit

$$\gamma = \omega_0 + \varepsilon$$

(avec ε petit), c'est-à-dire que nous nous trouvons au voisinage de la résonance ordinaire. Pour élucider le caractère du mouvement on peut se passer d'une étude directe de l'équation (29,1), si on utilise les considérations suivantes.

Dans l'approximation linéaire, la relation entre l'amplitude b de l'oscillation forcée d'une part, l'amplitude f et la fréquence γ de la force extérieure d'autre part, est donnée au voisinage de la résonance par la formule (26,7) que nous écrirons

$$b^2(\varepsilon^2 + \lambda^2) = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2}. \tag{29,2}$$

Le caractère non linéaire des oscillations conduit à une relation entre leur fréquence propre et l'amplitude; écrivons-la sous la forme

$$\omega_0 + \varkappa b^2, \tag{29,3}$$

où la constante $\varkappa$ s'exprime en fonction des coefficients d'anharmonicité (voir (28,13)). Remplaçons par conséquent dans la formule (29,2) (plus exactement dans la différence petite $\gamma - \omega_0$) ω_0 par $\omega_0 + \varkappa b^2$.

En conservant la notation $\varepsilon = \gamma - \omega_0$ nous obtenons finalement l'équation

$$b^2 [(\varepsilon - \varkappa b^2)^2 + \lambda^2] = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2} \tag{29,4}$$

ou

$$\varepsilon = \varkappa b^2 \pm \sqrt{\left(\frac{f}{2m\omega_0 b}\right)^2 - \lambda^2}.$$

L'équation (29,4) est du troisième degré par rapport à b^2, et ses racines réelles déterminent l'amplitude des oscillations forcées. Examinons la relation entre cette amplitude et la fréquence de la force extérieure pour une amplitude f donnée de celle-ci.

Pour des valeurs suffisamment petites de f l'amplitude b est également petite, de sorte que dans (29,4) on peut négliger les degrés de b supérieurs au second, ce qui nous ramène à la fonction $b(\varepsilon)$ (29,2) représentée par une courbe symétrique ayant son maximum au point $\varepsilon = 0$ (fig. 32, *a*). A mesure que f croît la courbe se déforme, en conservant d'abord son caractère, c'est-à-dire avec un seul maximum (fig. 32, *b*); ce dernier se déplace (pour $\varkappa > 0$) dans le sens de ε positifs. Des trois racines de l'équation (29,4) une seule est ici réelle.

Cependant, à partir d'une valeur déterminée $f = f_k$ (que nous définirons plus bas), le caractère de la courbe change. Pour chaque valeur de $f > f_k$ il existe un domaine de fréquences déterminé dans lequel l'équation (29,4) a trois racines réelles; à ce domaine correspond la partie *BCDE* de la courbe sur la fig. 32, *c*.

Les limites de ce domaine sont définies par la condition $\frac{db}{d\varepsilon} = \infty$ aux points D et C. En dérivant (29,4) par rapport à ε on obtient

$$\frac{db}{d\varepsilon} = \frac{-\varepsilon b - \varkappa b^3}{\varepsilon^2 + \lambda^2 - 4\varkappa\varepsilon b^2 + 3\varkappa^2 b^4}.$$

On détermine donc la position des points D et C en résolvant simultanément l'équation

$$\varepsilon^2 - 4\varkappa b^2 \varepsilon + 3\varkappa^2 b^4 + \lambda^2 = 0 \tag{29,5}$$

et l'équation (29,4); les valeurs correspondantes de ε sont toutes les deux positives. La valeur maximum de l'amplitude est atteinte au point $\frac{db}{d\varepsilon} = 0$. On a alors $\varepsilon = \varkappa b^2$ et (29,4) donne

$$b_{\max} = \frac{f}{2m\omega_0\lambda}; \tag{29,6}$$

cette valeur coïncide avec le maximum donné par la relation (29,2).

On peut démontrer (mais nous ne nous y arrêterons pas ici) que des trois racines réelles de l'équation (29,4), la racine moyenne (c'est-à-dire la partie CD de la courbe, représentée en pointillé sur la figure 32, *c*) correspond à des oscillations instables du système : toute action, aussi faible que l'on veut, sur un système se trouvant dans cet état, conduirait à un régime oscillatoire correspondant à

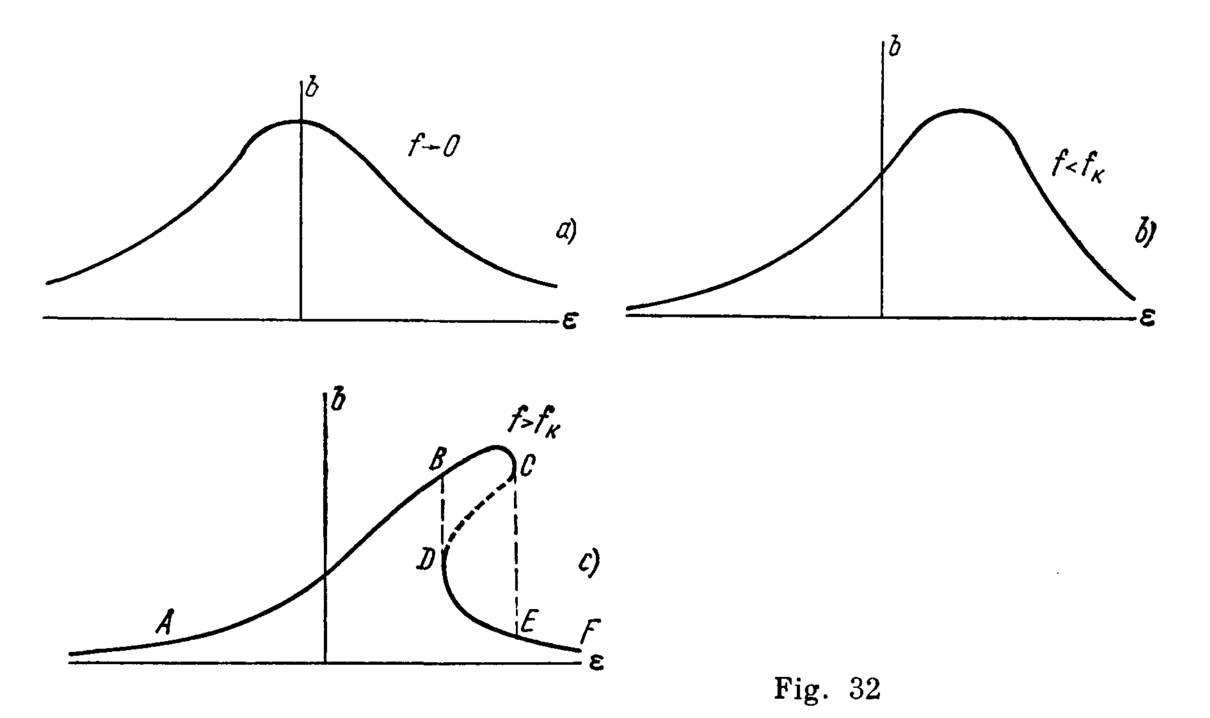


Fig. 32

la racine maximum ou à la racine minimum (c'est-à-dire aux parties BC ou DE de la courbe). De la sorte, seules les branches ABC et DEF correspondent à des oscillations réelles du système. La présence d'un domaine de fréquences admettant deux amplitudes différentes pour les oscillations constitue une particularité remarquable. Ainsi, lorsque la fréquence de la force extérieure augmente graduellement, l'amplitude des oscillations forcées croît suivant la courbe ABC. Au point C il se produit une « rupture » de l'amplitude qui tombe brusquement à la valeur correspondant au point E, puis varie le long de la courbe EF (lorsque la fréquence continue à augmenter). Si maintenant on diminue de nouveau la fréquence de la force extérieure, l'amplitude des oscillations forcées varie suivant la courbe FD, saute du point D au point B, puis décroît suivant BA.

Pour calculer la valeur de f_k, remarquons qu'elle représente la valeur de f pour laquelle les deux racines de l'équation du second degré par rapport à b^2 (29,5) coïncident ; pour $f = f_k$ toute la partie CD se réduit à un point d'inflexion. En égalant à 0 le discriminant de l'équation (29,5), on obtient $\varkappa^2 b^4 = \lambda^2$; la racine correspondante de l'équation est $\varepsilon = 2\varkappa b^2$. Portant ces valeurs de b et ε

dans (29,4), il vient:

$$f_k^2 = \frac{8m^2\omega_0^2\lambda^3}{|\varkappa|}. \tag{29,7}$$

A côté du changement de caractère des phénomènes de résonance pour des fréquences $\gamma \simeq \omega_0$, la non-linéarité des oscillations conduit aussi à l'apparition de nouvelles résonances dans lesquelles des oscillations dont la fréquence est voisine de ω_0 sont excitées par une force extérieure dont la fréquence diffère essentiellement de ω_0.

Soit $\gamma \simeq \frac{\omega_0}{2}$ la fréquence de la force extérieure, c'est-à-dire

$$\gamma = \frac{\omega_0}{2} + \varepsilon.$$

Dans la première approximation (appoximation linéaire) elle excite dans le système des oscillations de même fréquence et d'amplitude proportionnelle à l'amplitude de la force:

$$x^{(1)} = \frac{4f}{3m\omega_0^2} \cos\left(\frac{\omega_0}{2} + \varepsilon\right) t$$

(en accord avec la formule (22,4)). Mais lorsqu'on tient compte des termes non linéaires, dans la deuxième approximation, ces oscillations font apparaître dans le second membre de l'équation du mouvement (29,1) un terme de fréquence $2\gamma \simeq \omega_0$. Portons $x^{(1)}$ dans l'équation

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -\alpha x^{(1)2},$$

en introduisant le cosinus de l'angle double et en ne gardant dans le second membre que le terme de résonance, on obtient:

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -\frac{8\alpha f^2}{9m^2\omega_0^4} \cos(\omega_0 + 2\varepsilon)\, t. \tag{29,8}$$

Cette équation ne diffère de (29,1) que par le fait qu'au lieu de l'amplitude de la force f, elle contient une expression proportionnelle à f^2. Cela signifie qu'il apparaît une résonance du même caractère que celle qui a été envisagée plus haut pour les fréquences $\gamma \simeq \omega_0$, mais d'intensité moindre. La fonction $b(\varepsilon)$ s'obtient en remplaçant f par $-8\alpha f^2/9m\omega_0^4$ (et ε par 2ε) dans l'équation (29,4):

$$b^2\,[(2\varepsilon - \varkappa b^2)^2 + \lambda^2] = \frac{16\alpha^2 f^4}{81 m^4 \omega_0^{10}}. \tag{29,9}$$

Soit maintenant

$$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon$$

la fréquence de la force extérieure. En première approximation nous avons

$$x^{(1)} = -\frac{f}{3m\omega_0^2}\cos(2\omega_0+\varepsilon)\,t.$$

En substituant $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ dans l'équation (29,1) nous n'obtenons pas de termes ayant le caractère d'une force extérieure de résonance, comme c'était le cas précédemment. Il apparaît cependant une résonance de type paramétrique avec le terme du troisième ordre proportionnel au produit $x^{(1)}x^{(2)}$. Si de tous les termes non linéaires on ne conserve que celui-ci, on obtiendra pour $x^{(2)}$ l'équation

$$\ddot{x}^{(2)} = 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -2\alpha x^{(1)}x^{(2)}$$

ou

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2\left[1 - \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^4}\cos(2\omega_0+\varepsilon)\,t\right]x^{(2)} = 0, \qquad (29,10)$$

c'est-à-dire une équation du type (27,8) (tenant compte du frottement), conduisant, comme nous le savons déjà, à une instabilité des oscillations dans un intervalle de fréquences déterminé.

Cette équation n'est cependant pas suffisante pour déterminer l'amplitude résultante des oscillations. Cette amplitude dépend des effets de non-linéarité ; pour tenir compte de ceux-ci, il faut garder dans l'équation du mouvement les termes non linéaires par rapport à $x^{(2)}$:

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^2}\cos(2\omega_0+\varepsilon)\,t\cdot x^{(2)}. \qquad (29,11)$$

La remarque que nous allons faire permet de simplifier beaucoup l'étude de ce problème. En posant dans le second membre de (29,11)

$$x^{(2)} = b\cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + \delta\right]$$

(où b est l'amplitude des oscillations de résonance cherchée et δ un déphasage constant qui n'est pas essentiel pour la suite) et en écrivant le produit des deux facteurs périodiques sous la forme d'une somme de deux cosinus, nous obtenons ici le terme de résonance ordinaire

$$\frac{\alpha f b}{3m\omega_0^2}\cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t - \delta\right]$$

(par rapport à la fréquence propre ω_0 du système). Par suite, le problème se ramène de nouveau à celui de la résonance habituelle dans un système non linéaire, que nous avons étudié au début de ce paragraphe, avec cette seule différence que c'est maintenant la quantité $\alpha f b/3\omega_0^2$ qui joue le rôle de l'amplitude de la force extérieure (et qu'à la place de ε on a $\varepsilon/2$). Effectuons cette substitution dans l'équation (29,4), il vient

$$b^2\left[\left(\frac{\varepsilon}{2}-\varkappa b^2\right)^2+\lambda^2\right]=\frac{\alpha^2 f^2 b^2}{36 m^2\omega_0^6}\,.$$

En résolvant cette équation par rapport à b, nous obtenons pour l'amplitude les valeurs possibles suivantes:

$$b=0, \tag{29,12}$$

$$b^2=\frac{1}{\varkappa}\left[\frac{\varepsilon}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{6m\omega_0^3}\right)^2-\lambda^2}\right], \tag{29,13}$$

$$b^2=\frac{1}{\varkappa}\left[\frac{\varepsilon}{2}-\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{6m\omega_0^3}\right)^2-\lambda^2}\right]. \tag{29,14}$$

La relation entre b et ε ainsi obtenue est représentée sur la fig. 33 (pour $\varkappa>0$; si $\varkappa<0$ les courbes sont dirigées en sens

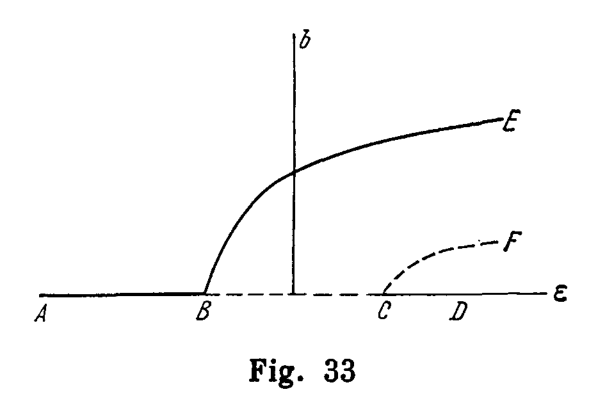


Fig. 33

inverse). Les points B et C correspondent aux valeurs

$$\varepsilon=\pm\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{3m\omega_0^3}\right)^2-4\lambda^2}.$$

A gauche du point B seule la valeur $b=0$ est possible, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de résonance et que les oscillations de fréquence $\approx\omega_0$ ne sont pas excitées. Dans l'intervalle entre B et C nous avons deux racines: $b=0$ (segment BC sur la fig. 33) et l'expression (29,13) (branche BE). Enfin, à droite du point C les trois racines (29,12), (29,13) et (29,14) existent. Cependant, ces valeurs ne correspondent pas toutes à un régime d'oscillation stable. La valeur

$b = 0$ est instable dans la partie BC[1], et on peut démontrer que le régime correspondant à la racine (29,14) (intermédiaire entre les deux autres) est toujours instable. Sur la fig. 33 les valeurs instables de b sont représentées en pointillé.

Suivons, par exemple, le comportement d'un système initialement « au repos »[2] lorsqu'on diminue graduellement la fréquence de la force extérieure. Avant que le point C ne soit atteint, on a toujours $b = 0$, puis il se produit une « rupture » de cet état et on passe sur la branche EB. ε continuant à diminuer, l'amplitude des oscillations décroît jusqu'à zéro au point B. Si alors on augmente la fréquence, l'amplitude des oscillations croîtra suivant la courbe BE[3].

Les cas de résonance que nous avons envisagés sont les cas fondamentaux qui se produisent dans un système à oscillations non linéaires. Aux approximations supérieures des phénomènes de résonance apparaissent également sur d'autres fréquences. Strictement parlant, il doit y avoir résonance pour toute fréquence γ telle que $n\gamma + m\omega_0 = \omega_0$ (n, m entiers), c'est-à-dire pour tout $\gamma = \frac{p\omega_0}{q}$ où p et q sont aussi des nombres entiers. Cependant, à mesure que s'élève le degré d'approximation, l'intensité des phénomènes de résonance (ainsi que la largeur des domaines de fréquences dans lesquels ils doivent avoir lieu) diminue avec une vitesse telle, qu'en réalité, seules sont observables les résonances pour des fréquences $\gamma \approx p\omega_0/q$ où p et q sont petits.

Problème

Déterminer la fonction $b(\varepsilon)$ pour une résonance aux fréquences $\gamma \simeq 3\omega_0$.

Solution. En première approximation

$$x^{(1)} = -\frac{f}{8m\omega_0^2} \cos(3\omega_0 + \varepsilon)\, t.$$

[1] Cet intervalle correspond justement au domaine de résonance paramétrique (27,12), et en comparant (29,10) et (27,8), on a $|h| = 2\alpha f/3m\omega_0^4$. La condition

$$\left| \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^3} \right| > 4\lambda$$

pour laquelle l'existence du phénomène envisagé est possible, correspond à l'inégalité $h > h_k$.

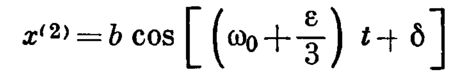
[2] Rappelons que nous ne considérons ici que les oscillations de résonance. Leur absence ne signifie donc pas littéralement que le système est au repos; il s'y produira de faibles oscillations forcées de fréquence γ.

[3] Il ne faut pas oublier que toutes ces formules ne sont valables que tant que l'amplitude b (et ε) reste assez petite. En fait, les courbes BE et CF ne sont pas infinies, mais se rejoignent en un certain point ; lorsque celui-ci est atteint, le régime d'oscillation « s'arrête » et on a $b = 0$.

Pour la deuxième approximation ($x^{(2)}$) on tire de (29,1) l'équation

$$\ddot{x}^{(2)}+2\lambda\dot{x}^{(2)}+\omega_0^2x^{(2)}+\alpha x^{(2)2}+\beta x^{(2)3}=-3\beta x^{(1)}x^{(2)2},$$

où on n'a écrit dans le second membre que le terme qui donne la résonance envisagée. En y portant



$$x^{(2)}=b\cos\left[\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{3}\right)t+\delta\right]$$

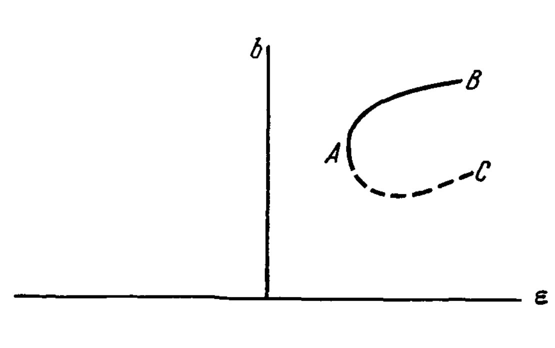


Fig. 34

et en sortant le terme de résonance du produit des trois cosinus, nous obtenons dans le second membre de l'équation l'expression

$$\frac{3\beta b^2 f}{32m\omega_0^2}\cos\left[\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{3}\right)t-2\delta\right].$$

D'où il est clair que la relation entre b et ε s'obtient en remplaçant dans (29,4) f par $3\beta b^2 f/32\omega_0^2$ et ε par $\varepsilon/3$:

$$b^2\left[\left(\frac{\varepsilon}{3}-\varkappa b^2\right)^2+\lambda^2\right]=\frac{9\beta^2f^2}{2^{12}m^2\omega_0^6}\,b^4\equiv Ab^4.$$

Cette équation a pour racines :

$$b=0,$$

$$b^2=\frac{\varepsilon}{3\varkappa}+\frac{A}{2\varkappa^2}\pm\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\varepsilon A}{3\varkappa}+\frac{A^2}{4\varkappa^2}-\lambda^2}.$$

Sur la fig. 34 est représenté graphiquement le caractère de la relation entre b et ε (pour $\varkappa>0$). Seules la valeur $b=0$ (axe des abscisses) et la branche AB correspondent à des régimes stables. Au point A correspondent les valeurs

$$\varepsilon_k=\frac{3\,(4\varkappa^2\lambda^2-A^2)}{4\varkappa A},\quad b_k^2=\frac{4\varkappa^2\lambda^2+A^2}{4\varkappa^2 A}.$$

Le régime oscillatoire existe seulement pour $\varepsilon>\varepsilon_k$, avec une amplitude $b>b_k$. Puisque l'état $b=0$ est toujours stable, il faut une « impulsion » initiale pour exciter les oscillations.

Les formules obtenues ne sont valables que pour de petits ε. La petitesse de ε garantit celle de λ, si l'amplitude de la force satisfait à la condition $A\sim\lambda$.

§ 30. Mouvement dans un champ à oscillations rapides

Considérons le mouvement d'une particule soumise simultanément à l'action d'un champ constant U et d'une force

$$f = f_1 \cos \omega t + f_2 \sin \omega t, \tag{30,1}$$

qui varie dans le temps avec une fréquence ω élevée (f_1 et f_2 sont fonctions des seules coordonnées). Par fréquence « élevée » nous entendons une fréquence répondant à la condition $\omega \gg 1/T$ où T est l'ordre de grandeur de la période du mouvement que la particule effectuerait dans le seul champ U. La grandeur de la force f n'est pas supposée petite par rapport aux forces agissant dans le champ U. Nous admettrons cependant que le déplacement oscillatoire de la particule provoqué par cette force est petit (ce déplacement sera désigné plus bas par ξ).

Pour simplifier les calculs, considérons d'abord un mouvement linéaire dans un champ dépendant seulement de l'une des coordonnées de l'espace, soit x. L'équation du mouvement de la particule est alors [1]

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} + f. \tag{30,2}$$

D'après le caractère du champ qui agit sur la particule, il est clair *a priori* que le mouvement de celle-ci apparaîtra comme un déplacement le long d'une trajectoire « non perturbée », accompagné de petites oscillations (de fréquence ω) autour de cette trajectoire. Ecrivons par conséquent la fonction $x(t)$ sous la forme

$$x(t) = X(t) + \xi(t), \tag{30,3}$$

où $\xi(t)$ représente les petites oscillations en question.

La valeur moyenne de la fonction $\xi(t)$ au cours d'une période $2\pi/\omega$ est nulle, et pendant le même temps la fonction $X(t)$ varie très peu. En désignant la valeur moyenne à l'aide d'un trait au-dessus de la lettre, nous avons donc $\bar{x} = X(t)$, c'est-à-dire que la fonction $X(t)$ décrit le mouvement « non perturbé » moyen de la particule par rapport aux oscillations rapides. Cherchons l'équation qui détermine cette fonction [2].

Portant (30,3) dans (30,2) et développant par rapport aux puissances de ξ (jusqu'aux termes du premier ordre), on obtient :

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = -\frac{dU}{dX} - \xi \frac{d^2U}{dX^2} + f(X, t) + \xi \frac{\partial f}{\partial X}. \tag{30,4}$$

---

[1] La coordonnée x n'est pas nécessairement cartésienne, et le coefficient m n'est pas nécessairement la masse de la particule, ni nécessairement constant. Cette hypothèse n'influe cependant pas sur le résultat final (voir plus bas).

[2] L'idée de la méthode ci-dessous appartient à Kapitsa (1951)

Dans cette équation figurent deux groupes de termes de caractère différent: oscillants et « non perturbés »; ils doivent évidemment se réduire entre eux dans chacun de ces deux groupes. Pour les termes oscillants, il suffit d'écrire:

$$m\ddot{\xi} = f(X, t), \tag{30,5}$$

les autres renferment le facteur petit ξ, et par conséquent sont petits par rapport à ceux que nous avons écrits (en ce qui concerne la dérivée $\ddot{\xi}$, elle est proportionnelle à ω^2 qui est grand, et ne peut donc être considérée comme petite). Intégrons l'équation (30,5) en tirant f de (30,1) (la grandeur X étant considérée comme constante), il vient:

$$\xi = -\frac{f}{m\omega^2}. \tag{30,6}$$

Calculons maintenant la moyenne dans le temps de l'équation (30,4) (dans le sens indiqué plus haut). Puisque les valeurs moyennes des premières puissances de f et ξ s'annulent, nous obtenons l'équation

$$m\ddot{X} = -\frac{dU}{dX} + \overline{\xi\frac{\partial f}{\partial X}} = -\frac{dU}{dX} - \frac{1}{m\omega^2}\overline{f\frac{\partial f}{\partial X}},$$

qui ne contient plus que la fonction $X(t)$. Ecrivons-la finalement sous la forme:

$$m\ddot{X} = -\frac{dU_{\text{eff}}}{dX}, \tag{30,7}$$

où « l'énergie potentielle efficace » est définie par [1]

$$U_{\text{eff}} = U + \frac{1}{2m\omega^2}\overline{f^2} = U + \frac{1}{4m\omega^2}(f_1^2 + f_2^2). \tag{30,8}$$

En comparant cette expression à (30,6), il est facile de voir que le terme supplémentaire (par rapport au champ U) ne représente rien d'autre que l'énergie cinétique moyenne du mouvement oscillatoire:

$$U_{\text{eff}} = U + \frac{m}{2}\overline{\dot{\xi}^2}. \tag{30,9}$$

Ainsi, le mouvement moyen de la particule par rapport aux oscillations s'effectue comme si, outre le champ constant U, agissait un champ supplémentaire également constant dépendant du carré de l'amplitude d'un champ variable.

On peut aisément généraliser le résultat obtenu au cas d'un système à un nombre quelconque de degrés de liberté représenté

[1] Si m dépend de x, il est facile de vérifier, à l'aide de calculs un peu plus longs, que les formules (30,7) et (30,8) restent valables.

par ses coordonnées généralisées q_i. Pour l'énergie potentielle efficace on obtient (au lieu de (30,8)) l'expression

$$U_{\text{eff}} = U + \frac{1}{2\omega^2} \sum_{i,k} a_{ik}^{-1} \overline{f_i f_k} = U + \sum_{i,k} \frac{a_{ik}^{-1}}{2} \overline{\dot{\xi}_i \dot{\xi}_k}, \qquad (30,10)$$

où les a_{ik}^{-1} (en général fonctions des coordonnées) sont les éléments de la matrice inverse de la matrice des coefficients a_{ik} de l'énergie cinétique du système (voir 5,5).

Problèmes

1. Déterminer les positions d'équilibre stable d'un pendule dont le point de suspension effectue des oscillations verticales de fréquence γ élevée ($\gamma \gg \gg \sqrt{g/l}$).

Solution. La fonction de Lagrange obtenue au problème 3, *c* du § 5 donne ici pour la force variable

$$f = -mla\gamma^2 \cos \gamma t \sin \varphi$$

(la grandeur x est représentée ici par l'angle φ). D'où « l'énergie potentielle efficace »

$$U_{\text{eff}} = mgl \left(-\cos \varphi + \frac{a^2\gamma^2}{4gl} \sin^2 \varphi \right) .$$

Les positions d'équilibre stable correspondent au minimum de cette fonction. La direction verticale vers le bas ($\varphi = 0$) est toujours stable. Si la condition

$$a^2\gamma^2 > 2gl$$

est remplie, la position verticale vers le haut ($\varphi = \pi$) sera aussi stable.

2. Même problème pour un pendule dont le point de suspension oscille horizontalement.

Solution. D'après la fonction de Lagrange obtenue au problème 3,*b*, § 5, nous trouvons $f = mla\gamma^2 \cos \gamma t \cos \varphi$ et

$$U_{\text{eff}} = mgl \left[-\cos \varphi + \frac{a^2\gamma^2}{4gl} \cos^2 \varphi \right] .$$

Si $a^2\gamma^2 < 2gl$, la position $\varphi = 0$ est stable. Mais si $a^2\gamma^2 > 2gl$, la valeur

$$\cos \varphi = \frac{2gl}{a^2\gamma^2}$$

correspond à un équilibre stable.

MOUVEMENT DU SOLIDE

§ 31. Vitesse angulaire

En Mécanique on peut définir un *corps solide* comme un système de points matériels dont les distances mutuelles sont invariables. Les systèmes qui existent réellement dans la nature ne peuvent évidemment répondre qu'approximativement à cette condition. Mais pour la majorité des corps solides dans les conditions habituelles, les changements de forme et de dimensions sont suffisamment faibles pour que, lorsqu'on étudie les lois du mouvement d'un solide considéré comme un tout, on puisse faire complètement abstraction de ces changements.

Dans la suite, nous considérerons souvent le solide comme un ensemble discret de points matériels, ce qui permettra de simplifier plus ou moins les raisonnements. Cependant, cela n'est nullement en contradiction avec le fait qu'on peut habituellement, en Mécanique, considérer un corps solide comme continu et laisser tout à fait de côté sa structure interne. Le passage des formules renfermant des sommations par rapport aux points discrets aux formules qui concernent le corps continu s'effectue simplement en remplaçant les masses des particules par la masse $\rho\, dV$ contenue dans un élément de volume dV (ρ densité de masse), et en intégrant pour tout le volume du corps.

Pour décrire le mouvement du solide, nous utiliserons deux systèmes de coordonnées: un système « immobile », c'est-à-dire galiléen XYZ, et un système de coordonnées $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ mobile, qui sera supposé en liaison rigide avec le corps solide et participant à tous les mouvements de celui-ci. Il est commode de placer l'origine du système mobile au centre d'inertie du corps.

La position d'un solide par rapport au système immobile est complètement déterminée si l'on donne la position du système mobile. Soit **R** le rayon vecteur indiquant la position de l'origine O du système mobile (fig. 35). L'orientation des axes de ce dernier par

rapport au système immobile est définie par trois angles indépendants, de sorte qu'avec les trois composantes du vecteur **R** nous avons en tout six coordonnées. Ainsi, tout corps solide se présente comme un système mécanique à six degrés de liberté.

Considérons un déplacement arbitraire infiniment petit du solide. On peut le représenter comme une somme de deux parties. L'une

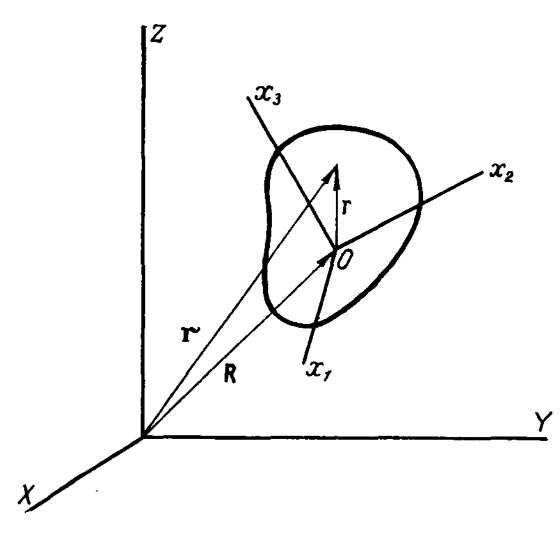


Fig. 35

est une translation parallèle infiniment petite du corps, par suite de laquelle le centre d'inertie passe d'une position initiale à une position finale, sans changement d'orientation des axes du système immobile. L'autre est une rotation infiniment petite autour du centre d'inertie, par suite de laquelle le solide passe à sa position finale.

Désignons par $\mathbf{r}$ le rayon vecteur d'un point P quelconque du solide dans le système de coordonnées mobiles, et par $\mathfrak{r}$ le rayon vecteur du même point dans le système immobile. Un déplacement infiniment petit $d\mathfrak{r}$, du point P est alors formé d'un déplacement $d\mathbf{R}$ avec le centre d'inertie et d'un déplacement $d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$ par rapport à ce dernier par rotation d'un angle infiniment petit $d\boldsymbol{\varphi}$ [voir (9,1)] :

$$d\mathfrak{r} = d\mathbf{R} + d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}.$$

En divisant cette égalité par le temps dt mis pour effectuer le déplacement considéré en introduisant les vitesses

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V}, \quad \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}, \tag{31,1}$$

nous obtenons la relation entre ces dernières

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}. \tag{31,2}$$

Le vecteur $\mathbf{V}$ est vitesse du centre d'inertie du solide; on l'appelle encore vitesse de son mouvement de *translation*. Le vecteur $\mathbf{\Omega}$ est appelé *vitesse angulaire* de rotation du corps solide; sa direction (comme la direction de $d\varphi$) coïncide avec celle de l'axe de rotation. De sorte que la vitesse $\mathbf{v}$ d'un point quelconque du corps (par rapport au système immobile) peut être exprimée en fonction de la vitesse de translation du corps et de la vitesse angulaire de sa rotation.

Il faut souligner que les propriétés spécifiques de l'origine des coordonnées comme centre d'inertie du corps n'ont absolument pas été utilisées pour établir la formule (31,2). L'avantage de ce choix n'apparaîtra que plus tard, lorsque nous étudierons l'énergie du corps en mouvement.

Admettons maintenant que le système de coordonnées lié au solide par des liaisons rigides soit choisi de telle sorte que son origine ne se trouve pas au centre d'inertie O, mais en un point O' placé à une distance $\mathbf{a}$ du point O. Soit $\mathbf{V}'$ la vitesse de déplacement de l'origine O' de ce système et $\mathbf{\Omega}'$ la vitesse angulaire de sa rotation.

Considérons à nouveau un point quelconque P du solide et soit $\mathbf{r}'$ son rayon vecteur par rapport à l'origine O'. On a alors $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$ et, en portant dans (31,2)

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{a} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}'.$$

D'autre part, d'après la définition de $\mathbf{V}'$ et $\mathbf{\Omega}'$, on doit avoir $\mathbf{v} = \mathbf{V}' + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{r}'$. Par suite :

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{a}, \quad \mathbf{\Omega}' = \mathbf{\Omega}. \tag{31,3}$$

La seconde de ces égalités est très importante. Nous voyons que la vitesse angulaire à laquelle tourne à chaque instant le système lié au corps est absolument indépendante de ce système. A l'instant donné, tous ces systèmes tournent autour d'axes parallèles les uns aux autres avec une vitesse $\mathbf{\Omega}$ unique en valeur absolue. Cette circonstance nous donne le droit d'appeler $\mathbf{\Omega}$ vitesse angulaire de rotation du solide en tant que tel. La vitesse du mouvement de translation n'a pas ce caractère « absolu ».

Il est clair d'après la première formule (31,3) que si $\mathbf{V}$ et $\mathbf{\Omega}$ (à un instant donné) sont perpendiculaires entre eux dans un système de coordonnées d'origine O, ces mêmes vecteurs (c'est-à-dire $\mathbf{V}'$ et $\mathbf{\Omega}'$) seront également perpendiculaires par rapport à une autre origine O'. D'après la formule (31,2), il est clair que dans ce cas [1] les vitesses des points du corps seront placées dans le même plan, perpendiculaire à $\mathbf{\Omega}$. On peut donc toujours choisir une origine O',

[1] Elle peut évidemment être située à l'extérieur du corps.

telle que sa vitesse $\mathbf{V}'$ soit nulle, de sorte que le mouvement du solide (à l'instant donné) se présentera comme un mouvement de rotation pure autour de l'axe passant par O'. On appelle cet axe *axe de rotation instantanée* du corps [1].

Dans la suite, nous choisirons toujours l'origine du système de coordonnées mobile au centre d'inertie du corps, de sorte que l'axe de rotation de ce dernier passera par ce centre. Lorsque le corps se meut, il y a en général variation aussi bien de la valeur absolue de $\boldsymbol{\Omega}$ que de la direction de l'axe de rotation.

§ 32. Tenseur d'inertie

Pour calculer l'énergie cinétique d'un solide, considérons celui-ci comme un système discret de points matériels et écrivons

$$T = \sum \frac{mv^2}{2},$$

où la sommation est effectuée pour tous les points qui composent le corps. Plus bas, comme ici, nous omettrons les indices qui numérotent ces points, afin de simplifier l'écriture.

Compte tenu de (31,2), on a

$$T = \sum \frac{m}{2} (\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 = \sum \frac{m}{2} V^2 +$$
$$+ \sum m\mathbf{V} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \sum \frac{m}{2} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2.$$

Les vitesses $\mathbf{V}$ et $\boldsymbol{\Omega}$ sont les mêmes pour tous les points du solide. Par suite, dans le premier terme, $V^2/2$ sort de sous le signe somme, et la somme Σm est la masse du corps que nous désignerons par μ. Pour le second terme écrivons:

$$\sum m\mathbf{V} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \sum m\mathbf{r} (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}) = (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}) \sum m\mathbf{r}.$$

D'où il est clair que si l'origine du système de coordonnées mobile est choisie, comme convenu, au centre d'inertie, ce terme s'annule puisque alors $\Sigma m\mathbf{r} = 0$. Pour le troisième terme enfin, développons le carré du produit vectoriel, et nous obtenons:

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} \sum m \{\Omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r})^2\}. \qquad (32,1)$$

---

[1] Dans le cas général où les directions de $\mathbf{V}$ et $\boldsymbol{\Omega}$ ne sont pas perpendiculaires, on peut choisir l'origine des coordonnées de façon que $\mathbf{V}$ et $\boldsymbol{\Omega}$ deviennent parallèles, c'est-à-dire que le mouvement (à l'instant donné) sera constitué par l'ensemble d'une rotation autour q'un axe et d'une translation le long de ce même axe.

Ainsi, l'énergie cinétique d'un solide peut être représentée sous la forme d'une somme de deux termes. Le premier de ceux-ci dans (32,1) est l'énergie cinétique du mouvement de translation: elle a la forme qu'elle aurait si toute la masse du corps était concentrée dans son centre d'inertie. Le second terme est l'énergie cinétique d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}$ autour d'un axe passant par le centre d'inertie. Soulignons que la possibilité de séparer ainsi l'énergie cinétique en deux parties est conditionnée par le choix de l'origine du système lié au corps précisément au centre d'inertie de celui-ci.

Ecrivons l'énergie cinétique de rotation en notations tensorielles c'est-à-dire en fonction des composantes x_i, Ω_i des vecteurs $\mathbf{r}$, $\mathbf{\Omega}$ [1]. On a

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum m \{\Omega_i^2 x_l^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum m \{\Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_l^2 - \Omega_i \Omega_k x_i x_k\} = \frac{1}{2} \Omega_i \Omega_k \sum m (x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k).$$

On a utilisé ici l'identité $\Omega_i = \delta_{ik} \Omega_k$ où δ_{ik} est le tenseur unité (dont les composantes sont égales à l'unité pour $i = k$ et à zéro pour $i \neq k$). Introduisons le tenseur

$$I_{ik} = \sum m (x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k), \tag{32,2}$$

et nous obtenons finalement l'expression de l'énergie cinétique du solide sous la forme

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k. \tag{32,3}$$

La fonction de Lagrange du solide s'obtient en retranchant l'énergie potentielle de (32,3) :

$$L = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k - U. \tag{32,4}$$

L'énergie potentielle est en général fonction des six variables qui déterminent la position du corps, par exemple, les trois coordonnées X, Y, Z du centre d'inertie et les trois angles définissant l'orientation des axes de coordonnées mobiles par rapport aux axes fixes.

Le tenseur I_{ik} est appelé *tenseur des moments d'inertie* ou simplement *tenseur d'inertie* du corps. D'après sa définition (32,2),

---

[1] Dans ce chapitre les lettres i, k, l désignent des indices tensoriels qui prennent les valeurs 1, 2, 3. En outre, nous appliquons partout la règle de sommation connue, selon laquelle les signes somme sont omis et la sommation par rapport aux valeurs 1, 2, 3 est sous-entendue pour tous les indices (dits « muets ») qui se répètent deux fois; ainsi, $A_i B_i = \mathbf{AB}$, $A_l^2 = A_l A_l = \mathbf{A}^2$, etc. ; on peut évidemment changer la désignation des indices muets (à condition toutefois qu'elle ne coïncide pas avec celle des autres indices tensoriels figurant dans l'expression donnée).

il est évidemment symétrique:

$$I_{ik} = I_{ki}. \tag{32,5}$$

Ecrivons le tableau de ces composantes

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2+z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2+y^2) \end{pmatrix}. \tag{32,6}$$

Les composantes I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} sont parfois appelées moments d'inertie par rapport aux axes correspondants.

Le tenseur d'inertie est évidemment additif: les moments d'inertie d'un corps sont égaux aux sommes des moments d'inertie de ses parties.

Dans la définition (32,2), si le solide peut être considéré comme continu, la somme sera remplacée par une intégrale étendue au volume du corps

$$I_{ik} = \int \rho\,(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k)\,dV. \tag{32,7}$$

Comme tout tenseur symétrique de second rang, le tenseur d'inertie peut être ramené à une forme diagonale par un choix approprié des directions des axes x_1, x_2, x_3. Ces directions sont appelées *axes principaux d'inertie*, et les valeurs correspondantes des composantes du tenseur, *moments principaux d'inertie*; désignons ceux-ci par I_1, I_2, I_3. Avec un tel choix des axes x_1, x_2, x_3 l'énergie cinétique de rotation s'exprime de façon particulièrement simple:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\right). \tag{32,8}$$

Remarquons qu'aucun des trois moments principaux d'inertie ne peut être supérieur à la somme des deux autres. Ainsi,

$$I_1 + I_2 = \sum m\left(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2\right) \geqslant \sum m\left(x_1^2 + x_2^2\right) = I_3. \tag{32,9}$$

On appelle *toupie asymétrique* un corps dont les trois moments principaux d'inertie sont différents.

Un corps sera appelé *toupie symétrique* si deux de ses moments principaux sont égaux $I_1 = I_2 \neq I_3$. Dans ce cas, le choix de la direction des axes principaux dans le plan x_1x_2 est arbitraire.

Si enfin les trois moments principaux d'inertie coïncident, le corps est appelé *toupie sphérique*. Dans ce cas, les trois axes principaux d'inertie peuvent être choisis arbitrairement: on peut prendre trois axes quelconques perpendiculaires entre eux.

La recherche des axes principaux d'inertie est beaucoup simplifiée si le solide possède une certaine symétrie; il est clair que la

position du centre d'inertie et les directions des axes principaux doivent posséder la même symétrie.

Ainsi, si un corps possède un plan de symétrie, son centre d'inertie doit se trouver dans ce plan. Celui-ci contient également deux axes principaux d'inertie, et le troisième lui est perpendiculaire. Un système de particules réparties dans un plan constitue évidemment un cas de ce genre. Il existe ici une relation simple entre les trois moments principaux d'inertie. Si on prend pour plan x_1x_2 le plan du système, on a alors, puisque $x_3 = 0$ pour toutes les particules,

$$I_1 = \sum mx_2^2, \quad I_2 = \sum mx_1^2, \quad I_3 = \sum m(x_1^2 + x_2^2),$$

de sorte que

$$I_3 = I_1 + I_2. \tag{32,10}$$

Si le corps possède un axe de symétrie d'ordre quelconque, son centre d'inertie sera situé sur cet axe. L'un des axes principaux coïncidera avec cet axe, et les deux autres lui seront perpendiculaires. Si l'ordre de l'axe de symétrie est supérieur à 2, le corps devient une toupie symétrique. En effet, on peut alors faire tourner chaque axe principal (perpendiculaire à l'axe de symétrie) d'un angle différant de 180°, c'est-à-dire que le choix de ces axes n'est plus unique, ce qui n'est possible que dans le cas d'une toupie symétrique.

Un cas spécial est constitué par un système de particules distribuées le long d'une droite. Si on prend cette droite pour axe x_3, on aura alors pour toutes les particules $x_1 = x_2 = 0$, de sorte que deux moments principaux d'inertie coïncideront, le troisième étant nul :

$$I_1 = I_2 = \sum mx_3^2, \; I_3 = 0. \tag{32,11}$$

Un tel système est appelé *rotateur*. Ce qui donne à un rotateur son caractère particulier par rapport à un corps quelconque, c'est le fait qu'il a en tout deux (et non trois) degrés de liberté de rotation, correspondant aux rotations autour des axes x_1 et x_2 ; parler de la rotation d'une droite autour d'elle-même n'a évidemment aucun sens.

Faisons une dernière remarque en ce qui concerne le calcul du tenseur d'inertie. Bien que nous ayons défini ce tenseur par rapport à un système de coordonnées ayant son origine au centre d'inertie (et c'est seulement avec cette définition que la formule fondamentale (32,3) est valable), il peut cependant apparaître plus commode de calculer d'abord le tenseur analogue

$$I'_{ik} = \sum m(x_l'^2 \delta_{ik} - x'_i x'_k),$$

défini par rapport à une autre origine O'. Si la distance OO' est donnée par un vecteur $\mathbf{a}$, on a $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$ et $x_i = x'_i + a_i$; compte

tenu aussi que $\sum m\mathbf{r}=0$ par définition du point 0, on trouve:

$$I'_{ik}=I_{ik}+\mu\,(a^2\delta_{ik}-a_ia_k). \qquad (32,12)$$

D'après cette formule et connaissant I'_{ik} il est facile de calculer le tenseur I_{ik} cherché.

Problèmes

1. Déterminer les moments principaux d'inertie pour des molécules considérées comme systèmes de particules, situées à des distances réciproques invariables, dans les cas suivants:

a) Molécule dont les atomes sont répartis sur une droite.

Réponse:

$$I_1=I_2=\frac{1}{\mu}\sum_{a\neq b} m_am_bl_{ab}^2, \qquad I_3=0,$$

où m_a et m_b sont les masses des atomes et l_{ab} la distance entre les atomes a et b; la sommation sera effectuée pour tous les couples d'atomes dans la molécule (chaque couple de valeurs a, b entrant une fois dans la somme).

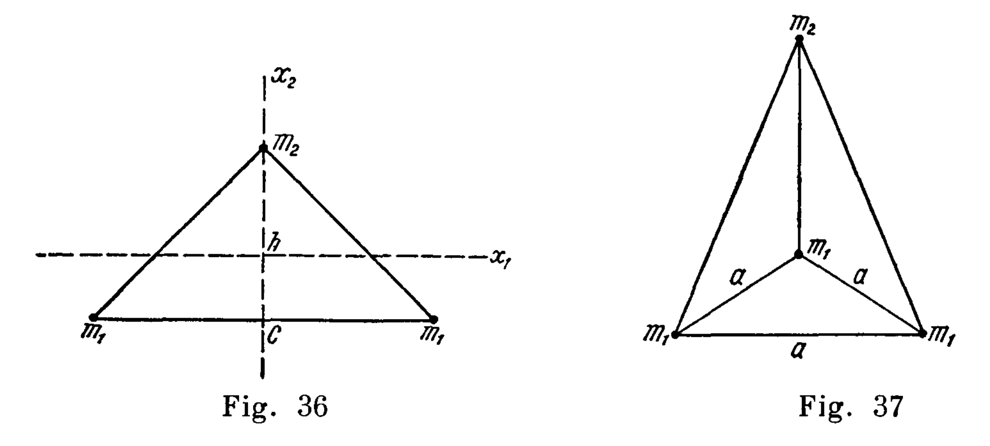


Fig. 36 Fig. 37

Pour une molécule diatomique, la somme se réduit à un seul terme, en donnant un résultat évident *a priori*: le produit de la masse réduite des deux atomes par le carré de leur distance:

$$I_1=I_2=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\,l^2.$$

b) Molécule triatomique ayant la forme d'un triangle isocèle (fig. 36).

Réponse: Le centre d'inertie est situé sur la hauteur du triangle à une distance $X_2=m_2h/\mu$ de sa base. Moments d'inertie:

$$I_1=\frac{2m_1m_2}{\mu}\,h^2, \qquad I_2=\frac{m_1}{2}\,a^2, \quad I_3=I_1+I_2.$$

c) Molécule tétraatomique dont les atomes sont situés aux sommets d'une pyramide triangulaire droite (fig. 37).

Réponse: Le centre d'inertie est situé sur la hauteur de la pyramide à une distance $X_3=m_2h/\mu$ de sa base. Moments d'inertie:

$$I_1=I_2=\frac{3m_1m_2}{\mu}\,h^2+\frac{m_1a^2}{2}, \qquad I_3=m_1a^2.$$

Pour $m_1=m_2$, $h=a\sqrt{\frac{2}{3}}$ nous obtenons une molécule tétraédrique de moments d'inertie

$$I_1=I_2=I_3=m_1a^2.$$

2. Déterminer les moments principaux d'inertie des corps homogènes continus suivants.

a) Tige mince de longueur l.

Réponse: $I_1=I_2=\frac{1}{12}\mu l^2$. $I_3=0$ (on néglige l'épaisseur de la tige).

b) Sphère de rayon R.

Réponse:

$$I_1=I_2=I_3=\frac{2}{5}\mu R^2$$

$\left(\text{il faut calculer la somme } I_1+I_2+I_3=2\rho\int r^2\,dV\right)$.

c) Cylindre circulaire de rayon R et de hauteur h.

Réponse:

$$I_1=I_2=\frac{\mu}{4}\left(R^2+\frac{h^2}{3}\right), \qquad I_3=\frac{\mu}{2}R^2$$

(x_3 axe du cylindre).

d) Parallélépipède rectangle d'arêtes a, b, c.

Réponse:

$$I_1=\frac{\mu}{12}(b^2+c^2), \quad I_2=\frac{\mu}{12}(c^2+a^2), \quad I_3=\frac{\mu}{12}(a^2+b^2)$$

(les axes x_1, x_2, x_3 sont parallèles aux arêtes a, b, c).

e) Cône circulaire de hauteur h et de rayon de base R.

Solution. Calculons d'abord le tenseur I'_{ik} par rapport à des axes ayant leur origine au sommet du cône (fig. 38). Le calcul s'effectue facilement en coordonnées cylindriques et donne:

$$I'_1=I'_2=\frac{3}{5}\mu\left(\frac{R^2}{4}+h^2\right), \quad I'_3=\frac{3}{10}\mu R^2.$$

Le centre de gravité, comme le montre un calcul simple, se trouve sur l'axe du cône à une distance $a=\frac{3h}{4}$ du sommet. D'après la formule (32,12) on trouve finalement

$$I_1=I_2=I'_1-\mu a^2=\frac{3}{20}\mu\left(R^2+\frac{h^2}{4}\right), \quad I_3=I'_3=\frac{3}{10}\mu R^2.$$

f) Ellipsoïde à trois axes de symétrie de demi-axes a, b, c.

Solution. Le centre d'inertie coïncide avec le centre de l'ellipsoïde et les axes principaux d'inertie avec ses axes. L'intégration étendue au volume de l'ellipsoïde peut être ramenée à une intégration par rapport au volume d'une sphère au moyen du changement de coordonnées $x=a\xi$, $y=b\eta$, $z=c\zeta$, qui transforme l'équation de la surface de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

en équation de la surface de la sphère unité

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1.$$

On obtient ainsi pour le moment d'inertie relatif à l'axe des x:

$$I_1=\rho\iiint(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=\rho abc\iiint(b^2\eta^2+c^2\zeta^2)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=$$
$$=abc\frac{1}{2}I'(b^2+c^2),$$

où I' est le moment d'inertie de la sphère de rayon unité. Tenant compte que le volume de l'ellipsoïde est égal à $\frac{4}{3}\pi abc$, on obtient finalement les moments d'inertie

$$I_1=\frac{\mu}{5}(b^2+c^2),\quad I_2=\frac{\mu}{5}(a^2+c^2)\qquad I_3=\frac{\mu}{5}(a^2+b^2).$$

3. Déterminer la fréquence des petites oscillations d'un pendule physique (corps solide oscillant dans un champ de pesanteur au voisinage d'un axe horizontal fixe).

Solution. Soit l la distance du centre d'inertie du pendule à l'axe de rotation, et α, β, γ les angles formés par les directions des axes principaux d'inertie

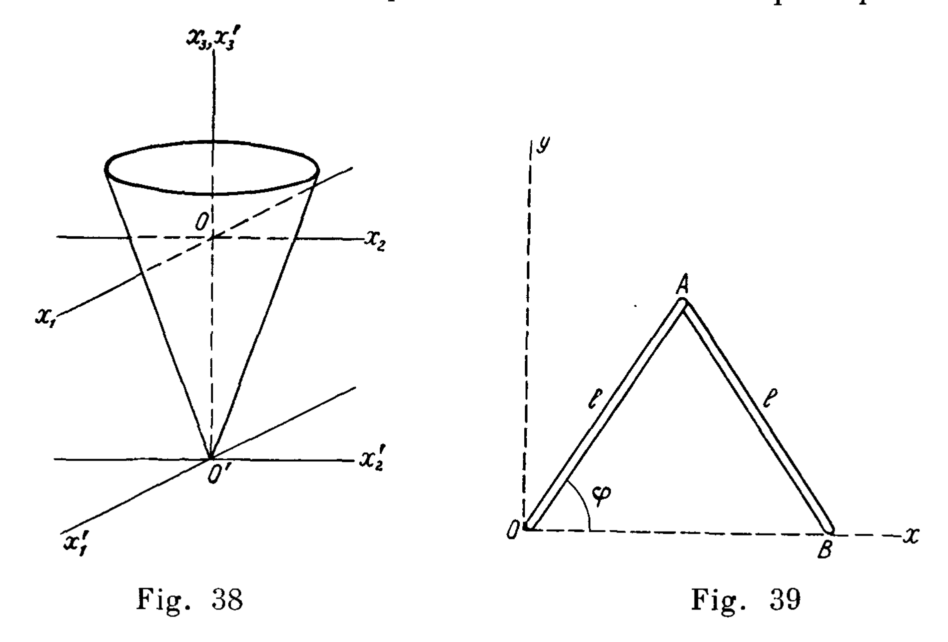


Fig. 38 Fig. 39

du pendule et l'axe de rotation. Comme coordonnée variable, faisons intervenir l'angle φ entre la verticale et la perpendiculaire menée du centre d'inertie sur l'axe de rotation. La vitesse du centre d'inertie est $V = l\dot{\varphi}$, et les projections de la vitesse angulaire sur les axes principaux d'inertie : $\dot{\varphi}\cos\alpha$, $\dot{\varphi}\cos\beta$, $\dot{\varphi}\cos\gamma$. En considérant l'angle φ comme petit, nous trouvons l'énergie potentielle sous la forme

$$U=\mu gl(1-\cos\varphi)\simeq\frac{1}{2}\mu gl\varphi^2.$$

La fonction de Lagrange est par suite

$$L=\frac{\mu l^2}{2}\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}(I_1\cos^2\alpha+I_2\cos^2\beta+I_3\cos^2\gamma)\dot{\varphi}^2-\frac{\mu g l}{2}\varphi^2.$$

D'où la fréquence des oscillations

$$\omega^2=\frac{\mu g l}{\mu l^2+I_1\cos^2\alpha+I_2\cos^2\beta+I_3\cos^2\gamma}.$$

4. Trouver l'énergie cinétique du système représenté sur la fig. 39; OA et AB sont des tiges minces homogènes de longueur l attachées par une charnière au point A. La tige OA pivote (dans le plan de la figure) autour du point O, et l'extrémité B de la tige AB glisse le long de l'axe Ox.

Solution. La vitesse du centre d'inertie de la tige OA (situé au milieu de celle-ci) est $l\dot{\varphi}/2$, où φ est l'angle AOB. L'énergie cinétique de la tige OA est donc

$$T_1=\frac{\mu l^2}{8}\dot{\varphi}^2+\frac{I}{2}\dot{\varphi}^2$$

(μ masse d'une tige).

Les coordonnées cartésiennes du centre d'inertie de la tige AB sont $X=\frac{3l}{2}\cos\varphi$, $Y=\frac{l}{2}\sin\varphi$. Puisque la vitesse angulaire de rotation de cette tige est aussi égale à $\dot{\varphi}$, son énergie cinétique est

$$T_2=\frac{\mu}{2}(\dot{X}^2+\dot{Y}^2)+\frac{I}{2}\dot{\varphi}^2=\frac{\mu l^2}{8}(1+8\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2+\frac{I\dot{\varphi}^2}{2},$$

d'où l'énergie cinétique totale du système

$$T=\frac{\mu l^2}{3}(1+3\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2$$

(on a posé $I=\mu l^2/12$ d'après le problème 2, a)).

5. Trouver l'énergie cinétique d'un cylindre (de rayon R) roulant sur un plan. La masse du cylindre est répartie dans son volume de telle sorte que l'un des axes principaux d'inertie soit parallèle à l'axe du cylindre et passe à une distance a de celui-ci; le moment d'inertie relatif à cet axe est I.

Solution. Introduisons l'angle φ entre la verticale et la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur l'axe du cylindre (fig. 40). On peut considérer le mouvement du cylindre à chaque instant comme une rotation pure autour de l'axe instantané qui coïncide avec la ligne de contact du cylindre et du plan fixe; la vitesse angulaire de cette rotation est $\dot{\varphi}$ (la vitesse angulaire de rotation autour de tous les axes parallèles est la même). Le centre d'inertie se trouve à une distance $\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\varphi}$ de l'axe instantané et sa vitesse est, par suite, $V=\dot{\varphi}\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\varphi}$. Energie cinétique totale

$$T=\frac{\mu}{2}(a^2+R^2-2aR\cos\varphi)\dot{\varphi}^2+\frac{I}{2}\dot{\varphi}^2.$$

6. Trouver l'énergie cinétique d'un cylindre homogène de rayon a roulant à l'intérieur d'une surface cylindrique de rayon R (fig. 41).

Solution. Utilisons l'angle φ formé par la droite qui joint les centres des deux cylindres et la verticale. Le centre d'inertie du cylindre roulant se trouve sur l'axe et sa vitesse est $V = \dot{\varphi}\,(R - a)$. Calculons la vitesse angulaire comme

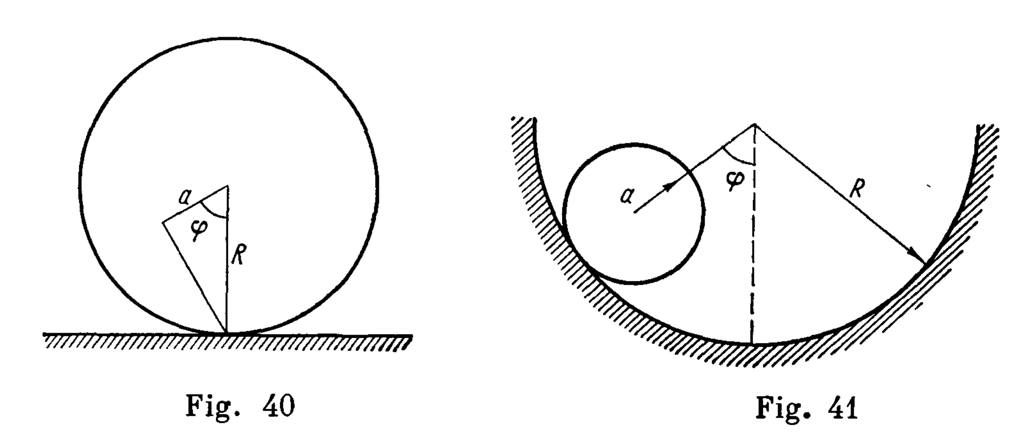


Fig. 40 Fig. 41

vitesse de rotation pure autour de l'axe instantané qui coïncide avec la ligne de contact des deux cylindres; elle est égale à

$$\Omega = \frac{V}{a} = \dot{\varphi}\,\frac{R-a}{a}.$$

Si I_3 est le moment d'inertie relatif à l'axe du cylindre, on a:

$$T = \frac{\mu}{2}(R-a)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{I_3}{2}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4}\mu\,(R-a)^2\dot{\varphi}^2$$

(I_3 est tiré du problème 2,*c*)).

7. Trouver l'énergie cinétique d'un cône homogène roulant sur un plan.

Solution. Soit θ l'angle formé par la ligne OA de contact entre le cône et le plan, et une direction fixe quelconque dans ce plan (fig. 42). Le centre d'inertie

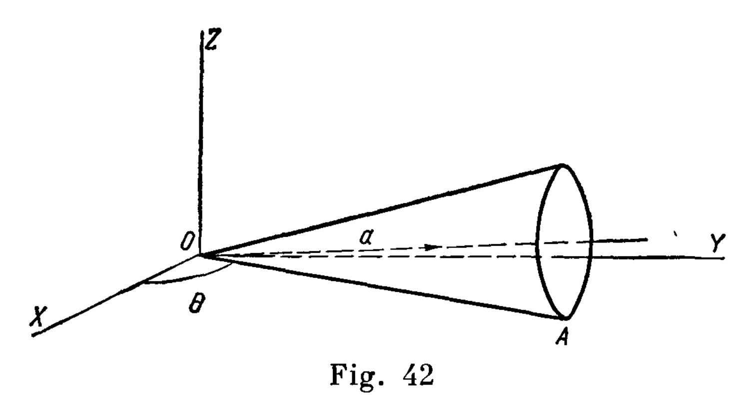


Fig. 42

se trouve sur l'axe du cône, et sa vitesse est $V = a\cos\alpha\cdot\dot{\theta}$, où 2α est l'angle d'ouverture du cône, et a la distance du centre d'inertie au sommet. Calculons la vitesse angulaire de rotation comme vitesse d'une rotation pure autour de l'axe instantané OA:

$$\Omega = \frac{V}{a\sin\alpha} = \dot{\theta}\operatorname{ctg}\alpha.$$

L'un des axes principaux d'inertie (axe x_3) coïncide avec l'axe du cône; choisissons l'autre (x_2) perpendiculaire à l'axe du cône et à la droite OA.

Les projections du vecteur $\mathbf{\Omega}$ (dirigé parallèlement à OA) sur les axes principaux d'inertie sont alors: $\Omega \sin\alpha$, 0, $\Omega\cos\alpha$. Nous trouvons donc pour l'énergie cinétique cherchée:

$$T = \frac{\mu a^2}{2} \cos^2\alpha \cdot \dot\theta^2 + \frac{I_1}{2}\cos^2\alpha \cdot \dot\theta^2 + \frac{I_3}{2}\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}\dot\theta^2 = \frac{3\mu h^2}{40}\dot\theta^2 (1 + 5\cos^2\alpha)$$

(h hauteur du cône, I_1, I_2, a étant tirés du problème 2,*e*)).

8. Trouver l'énergie cinétique d'un cône homogène dont la base roule sur un plan, et dont le sommet se trouve au-dessus de ce plan à une hauteur égale au rayon de la base (de sorte que l'axe du cône est parallèle au plan).

Solution. Utilisons l'angle θ entre une direction donnée dans le plan et la projection sur celui-ci de l'axe du cône (fig. 43). La vitesse du centre d'inertie

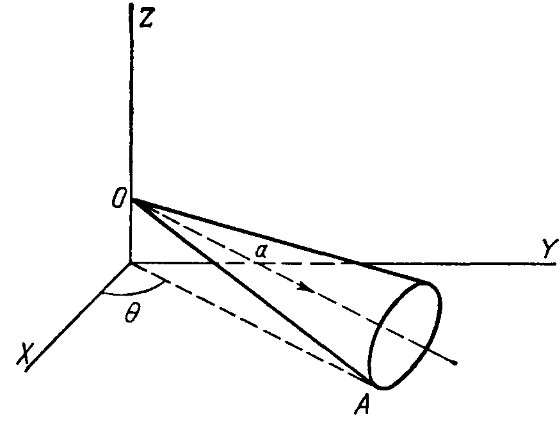


Fig. 43

est alors $V = a\dot\theta$ (mêmes notations qu'au problème 7). L'axe instantané de rotation est ici la génératrice OA du cône menée au point de contact de celui-ci avec le plan. Le centre d'inertie se trouve à une distance $a\sin\alpha$ de cet axe, et par suite

$$\Omega = \frac{V}{a\sin\alpha} = \frac{\dot\theta}{\sin\alpha}.$$

Les projections du vecteur $\mathbf{\Omega}$ sur les axes principaux d'inertie (nous choisissons l'axe x_2 perpendiculaire à l'axe du cône et à la direction OA) sont:

$$\Omega\sin\alpha = \dot\theta,\ 0,\ \Omega\cos\alpha = \dot\theta \operatorname{ctg}\alpha.$$

L'énergie cinétique est par conséquent

$$T = \frac{\mu a^2}{2}\dot\theta^2 + \frac{I_1}{2}\dot\theta^2 + \frac{I_3}{2}\dot\theta^2 \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{3\mu h^2}{40}\dot\theta^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} + 5\right).$$

9. Trouver l'énergie cinétique d'un ellipsoïde homogène à trois axes de symétrie, tournant autour de l'un de ses axes (AB, fig. 44), ce dernier tournant lui-même autour de la perpendiculaire CD passant par le centre de l'ellipsoïde.

Solution. Appelons θ l'angle de rotation autour de l'axe CD et φ l'angle de rotation autour de l'axe AB (angle formé par CD et l'axe d'inertie x_1 perpendiculaire à AB). Les projections de $\mathbf{\Omega}$ sur les axes d'inertie sont alors

$$\dot\theta\cos\varphi,\ \dot\theta\sin\varphi,\ \dot\varphi$$

(l'axe x_3 coïncidant avec AB). Puisque le centre d'inertie, qui coïncide avec le centre de l'ellipsoïde, est immobile, l'énergie cinétique est

$$T=\frac{1}{2}(I_1\cos^2\varphi+I_2\sin^2\varphi)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}I_3\dot{\varphi}^2.$$

10. Même problème, l'axe AB étant incliné, et l'ellipsoïde symétrique par rapport à cet axe (fig. 45).

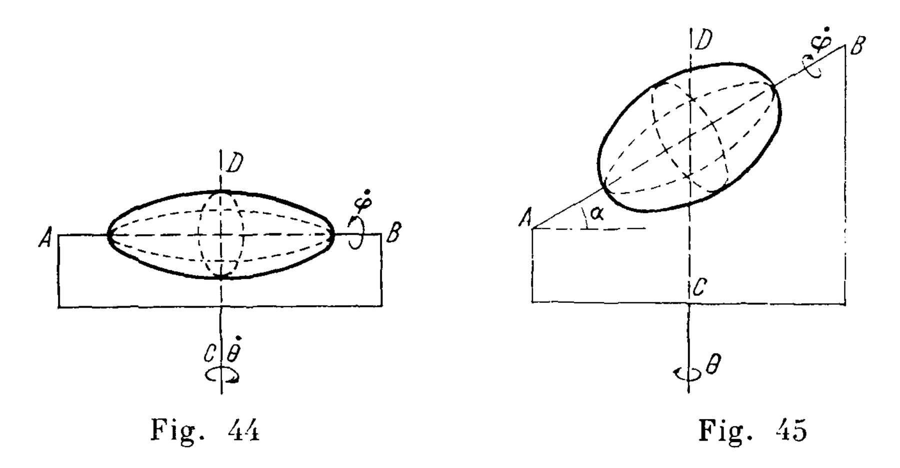


Fig. 44 Fig. 45

Solution. Les projections de $\mathbf{\Omega}$ sur l'axe AB et sur les deux autres axes principaux d'inertie perpendiculaires à AB (et que l'on peut choisir de façon arbitraire) sont:

$$\dot{\theta}\cos\alpha\cos\varphi,\quad \dot{\theta}\cos\alpha\sin\varphi,\quad \dot{\varphi}+\dot{\theta}\sin\alpha.$$

D'où l'énergie cinétique

$$T=\frac{I_1}{2}\cos^2\alpha\cdot\dot{\theta}^2+\frac{I_3}{2}(\dot{\varphi}+\dot{\theta}\sin\alpha)^2.$$

§ 33. Moment cinétique du solide

Nous savons que le moment cinétique d'un système dépend du choix du point par rapport auquel il est défini. En mécanique du solide, le plus rationnel est de choisir ce point à l'origine du système de coordonnées fixe, c'est-à-dire au centre d'inertie du corps. Plus bas, nous désignerons par $\mathbf{M}$ le moment défini précisément de cette façon.

D'après la formule (9,6), lorsqu'on choisit l'origine des coordonnées au centre d'inertie du corps, son moment coïncide avec le « moment propre » lié seulement au mouvement des points du corps par rapport au centre d'inertie. En d'autres termes, dans la définition $\mathbf{M} = \Sigma\, m\,\mathbf{r}\times\mathbf{v}$ il faut remplacer $\mathbf{v}$ par $\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}$:

$$\mathbf{M}=\sum m\mathbf{r}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})=\sum m\{\mathbf{r}^2\mathbf{\Omega}-\mathbf{r}(\mathbf{r\Omega})\},$$

soit en notations tensorielles:

$$M_i=\sum m\{x_l^2\Omega_i-x_ix_k\Omega_k\}=\Omega_k\sum m\{x_l^2\delta_{ik}-x_ix_k\}.$$

Compte tenu de la définition (32,2) du tenseur d'inertie, nous obtenons finalement

$$M_i = I_{ik}\Omega_k. \tag{33,1}$$

Si les axes x_1, x_2, x_3 sont dirigés suivant les axes principaux d'inertie du corps, cette formule donne

$$M_1 = I_1\Omega_1, \quad M_2 = I_2\Omega_2, \quad M_3 = I_3\Omega_3. \tag{33,2}$$

En particulier, pour une toupie sphérique dont les trois moments principaux d'inertie coïncident, on a simplement :

$$\mathbf{M} = I\mathbf{\Omega}, \tag{33,3}$$

c'est-à-dire que le vecteur moment est proportionnel au vecteur vitesse angulaire et de même direction.

Dans le cas général d'un corps quelconque la direction du vecteur $\mathbf{M}$ ne coïncide pas avec celle du vecteur $\mathbf{\Omega}$; et c'est seulement pour une rotation du corps autour de l'un de ses axes principaux d'inertie que $\mathbf{M}$ et $\mathbf{\Omega}$ ont la même direction.

Considérons le mouvement libre d'un solide soumis à l'action d'une force extérieure. Le mouvement de translation uniforme ne présentant pas d'intérêt ici, nous le considérerons comme exclu, de sorte que nous aurons affaire à une rotation libre.

Comme pour tout système fermé, le moment cinétique d'un corps animé d'un mouvement de rotation libre est constant. Pour une toupie sphérique la condition $\mathbf{M}$ = Cte entraîne simplement $\mathbf{\Omega}$ = = Cte. Cela signifie que dans le cas général, la rotation libre d'une toupie sphérique est simplement une rotation uniforme autour d'un axe constant.

Le cas du rotateur est aussi simple. On a également ici $\mathbf{M} = I\mathbf{\Omega}$, le vecteur $\mathbf{\Omega}$ étant perpendiculaire à l'axe du rotateur. Par suite, la rotation libre d'un rotateur est une rotation uniforme dans un plan autour d'une direction perpendiculaire à ce plan.

La loi de conservation du moment est également suffisante pour définir la rotation libre plus complexe d'une toupie symétrique.

Profitons du fait que l'on peut choisir arbitrairement les directions des axes principaux d'inertie x_1, x_2 (perpendiculaires à l'axe de symétrie x_3 de la toupie), et choisissons l'axe x_2 perpendiculaire au plan défini par le vecteur constant $\mathbf{M}$ et la position instantanée de l'axe x_3. Alors $M_2 = 0$, et il est clair d'après les formules (32,2) que $\Omega_2 = 0$ également. Cela signifie qu'à chaque instant les directions de $\mathbf{M}$, $\mathbf{\Omega}$ et de l'axe de la toupie se trouvent dans un même plan (fig. 46). Mais il s'ensuit qu'à chaque instant également, les vitesses $\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$ de tous les points situés sur l'axe de la toupie sont perpendiculaires au plan en question ; en d'autres termes, l'axe de la toupie tourne uniformément (voir plus bas) autour de la direc-

tion de **M**, décrivant un cône circulaire (c'est ce qu'on appelle la *précession régulière* de la toupie). En même temps que cette précession, la toupie elle-même tourne uniformément autour de son axe propre.

Il est facile d'exprimer les vitesses angulaires de ces deux rotations en fonction de la valeur donnée M du moment et de l'angle θ

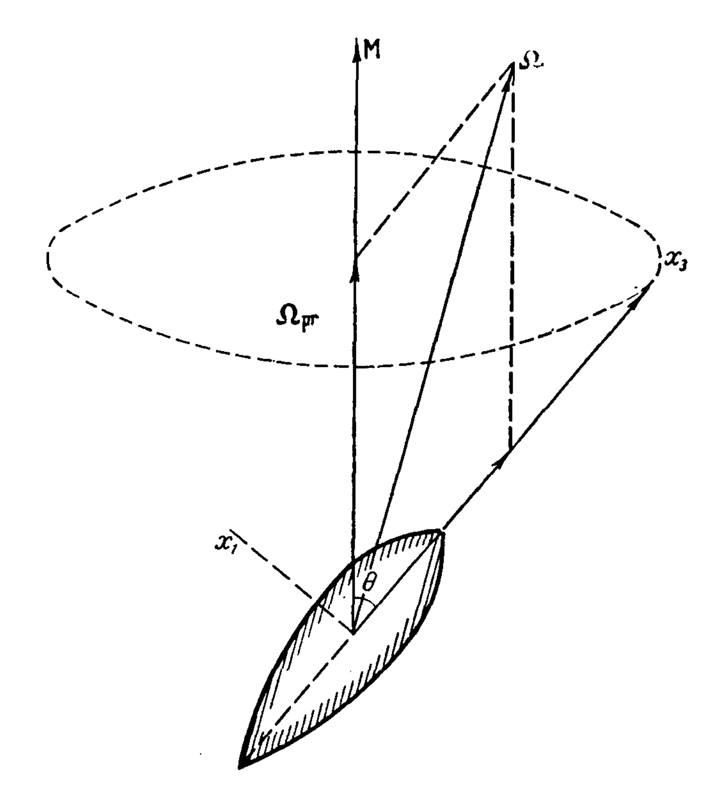


Fig. 46

d'inclinaison de l'axe de la toupie sur la direction de **M**. La vitesse angulaire de rotation de la toupie autour de son axe n'est autre que la projection Ω_3 du vecteur $\boldsymbol{\Omega}$ sur cet axe:

$$\Omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = \frac{M}{I_3} \cos\theta. \tag{33,4}$$

Pour déterminer la vitesse de précession Ω_{pr} il faut décomposer le vecteur $\boldsymbol{\Omega}$ suivant la règle du parallélogramme en ses composantes sur x_3 et **M**. La première ne conduit à aucun déplacement de l'axe de la toupie lui-même, et par conséquent, la deuxième donne la vitesse angulaire de précession cherchée. La construction de la fig. 46 montre que $\sin\theta\,\Omega_{pr} = \Omega_1$, et puisque $\Omega_1 = M_1/I_1 = M \sin\theta/I_1$, on a

$$\Omega_{pr} = \frac{M}{I_1}. \tag{33,5}$$

§ 34. Equations du mouvement d'un solide

Puisqu'un corps solide possède généralement six degrés de liberté, le système général des équations du mouvement doit contenir six équations indépendantes. On peut les mettre sous une forme définissant les dérivées par rapport au temps de deux vecteurs: l'impulsion et le moment du corps.

La première de ces équations s'obtient simplement en sommant les équations $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}$ pour chacune des particules qui composent le corps, $\mathbf{p}$ étant l'impulsion d'une particule, et $\mathbf{f}$ la force qui agit sur elle. Faisant intervenir l'impulsion totale du corps

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p} = \mu \mathbf{V}$$

et la force totale $\sum \mathbf{f} = \mathbf{F}$ qui agit sur lui, on obtient

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}. \tag{34,1}$$

Bien que nous ayons défini $\mathbf{F}$ comme la somme de toutes les forces $\mathbf{f}$ agissant sur chaque particule, y compris les forces exercées par les autres particules du corps, en fait dans $\mathbf{F}$ n'entrent que les forces dues aux sources extérieures. Toutes les forces d'interaction entre les particules du corps lui-même s'annulent réciproquement; en effet, en l'absence de forces extérieures, l'impulsion du corps doit, comme pour tout système formé, se conserver, c'est-à-dire qu'on doit avoir $\mathbf{F} = 0$.

Si U est l'énergie potentielle du solide dans un champ extérieur, la force $\mathbf{F}$ peut être définie par dérivation de cette énergie par rapport aux coordonnées du centre d'inertie du corps:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}}. \tag{34,2}$$

En effet, pour une petite translation $\delta\mathbf{R}$ du corps, les rayons vecteurs $\mathbf{r}$ de chacun de ses points varient d'autant, et la variation de l'énergie potentielle est par suite

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{R} \sum \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = -\delta \mathbf{R} \sum \mathbf{f} = -\mathbf{F}\delta\mathbf{R}.$$

Remarquons en l'occurence que l'équation (34,1) peut être obtenue aussi comme équation de Lagrange prise par rapport aux coordonnées du centre d'inertie

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}}$$

avec la fonction de Lagrange (32,4), pour laquelle

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} = \mu \mathbf{V} = \mathbf{P}, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} = \mathbf{F}.$$

Etabilissons maintenant la seconde équation du mouvement qui détermine la dérivée par rapport au temps du moment d'impulsion **M**. Pour simplifier les calculs, il est commode de choisir un système de référence « fixe » (galiléen) de telle façon qu'à l'instant donné le centre d'inertie du corps y soit au repos. L'équation du mouvement ainsi obtenue sera par là même, en vertu du principe de relativité de Galilée, valable dans tout autre système de référence galiléen.

On a :

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{d}{dt}\sum \mathbf{r}\times\mathbf{p} = \sum \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{p} + \sum \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{p}}.$$

Par suite du choix que nous avons fait du système de référence (dans lequel $\mathbf{V} = 0$), la valeur de $\dot{\mathbf{r}}$ coïncide à chaque instant avec la vitesse $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$. Et puisque les vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ ont même direction, $\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{p} = 0$. Remplaçons aussi $\dot{\mathbf{p}}$ par la force $\mathbf{f}$, et nous obtenons finalement

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K}, \tag{34,3}$$

où

$$\mathbf{K} = \sum \mathbf{r}\times\mathbf{f}. \tag{34,4}$$

Le vecteur $\mathbf{r}\times\mathbf{f}$ est appelé *moment de la force* $\mathbf{f}$, de sorte que **K** est la somme des moments de toutes les forces agissant sur le corps. De même que pour la force totale **F**, on ne doit tenir compte en fait, dans la somme (34,4), que des forces extérieures ; en accord avec la loi de conservation du moment cinétique, la somme des moments de toutes les forces agissant à l'intérieur du système fermé doit s'annuler.

Le moment de force, comme le moment d'impulsion, dépend en général du choix de l'origine des coordonnées par rapport à laquelle il est défini. Dans (34,3) et (34,4) les moments sont définis par rapport au centre d'inertie du corps.

Si l'on transporte l'origine des coordonnées à une distance **a**, les nouveaux rayons vecteurs $\mathbf{r}'$ des points du corps seront liés aux anciens $\mathbf{r}$ par $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$. Par suite

$$\mathbf{K} = \sum \mathbf{r}\times\mathbf{f} = \sum \mathbf{r}'\times\mathbf{f} + \sum \mathbf{a}\times\mathbf{f}$$

ou

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}' + \mathbf{a}\times\mathbf{F}. \tag{34,5}$$

Il en résulte en particulier que la valeur du moment des forces ne dépend pas du choix de l'origine des coordonnées si la force totale $\mathbf{F} = 0$ (on dit dans ce cas que le corps est soumis à un *couple de forces*).

On peut considérer l'équation (34,3) comme équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{\Omega}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\varphi}}$$

par rapport à des « coordonnées de rotation ». En effet, en dérivant la fonction de Lagrange (32,4) par rapport aux coordonnées du vecteur $\mathbf{\Omega}$, on obtient

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega_i} = I_{ik}\Omega_k = M_i.$$

La variation de l'énergie potentielle U lorsqu'on fait tourner le corps d'un angle $\delta\boldsymbol{\varphi}$ infiniment petit, est alors

$$\delta U = -\sum \mathbf{f}\delta\mathbf{r} = -\sum \mathbf{f}(\delta\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{r}) = -\delta\boldsymbol{\varphi}\sum \mathbf{r}\times\mathbf{f} = -\mathbf{K}\delta\boldsymbol{\varphi},$$

d'où

$$\mathbf{K} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varphi}}, \tag{34,6}$$

de sorte que

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{K}.$$

Supposons que les vecteurs $\mathbf{F}$ et $\mathbf{K}$ sont perpendiculaires entre eux. Dans ce cas on peut toujours trouver un vecteur $\mathbf{a}$ tel que $\mathbf{K}'$ s'annule dans la formule (34,5), de sorte qu'on aura

$$\mathbf{K} = \mathbf{a}\times\mathbf{F}. \tag{34,7}$$

Mais le choix de $\mathbf{a}$ n'est pas univoque : si on lui ajoute un vecteur quelconque parallèle à $\mathbf{F}$, cela ne changera rien à l'égalité (34,7), de sorte que la condition $\mathbf{K}' = 0$ donnera non pas un point déterminé dans le système de coordonnées fixe, mais seulement une droite déterminée. Ainsi, pour $\mathbf{K} \perp \mathbf{F}$ l'action de toutes les forces appliquées au corps peut être ramenée à une force unique $\mathbf{F}$ agissant le long d'une droite déterminée.

Tel est en particulier le cas d'un champ de forces homogène, dans lequel la force agissant sur un point matériel est de la forme $\mathbf{f} = e\mathbf{E}$ où $\mathbf{E}$ est un vecteur constant caractérisant le champ et e une grandeur caractérisant les propriétés de la particule dans le champ donné [1]. Nous avons dans ce cas

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}\sum e, \quad \mathbf{K} = \sum e\mathbf{r}\times\mathbf{E}.$$

Posant $\sum e \neq 0$, introduisons le rayon vecteur $\mathbf{r}_0$ défini par

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sum e\mathbf{r}}{\sum e}. \tag{34,8}$$

[1] Ainsi, dans un champ électrique uniforme, $\mathbf{E}$ est l'intensité du champ, et e la charge de la particule. Dans un champ de gravité uniforme $\mathbf{E}$ est l'accélération de la force de pesanteur ($\mathbf{g}$), et e la masse de la particule (m).

Nous obtenons alors pour le moment total des forces l'expression simple suivante:

$$\mathbf{K} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{F}. \tag{34,9}$$

Lorsqu'un corps solide se meut dans un champ uniforme, l'influence de celui-ci se ramène donc à l'action d'une force **F**, « appliquée » au point de rayon vecteur (34,8). La position de ce point est entièrement définie par les propriétés du corps lui-même; dans un champ de gravité par exemple, le point coïncide avec le centre d'inertie du corps.

§ 35. Angles d'Euler

Comme nous l'avons déjà vu, on peut décrire le mouvement d'un solide à l'aide des trois coordonnées de son centre d'inertie et de trois angles qui définissent l'orientation des axes x_1, x_2, x_3 du système de coordonnées mobile relativement au système fixe X, Y, Z. Pour ces angles, il apparaît souvent commode d'utiliser ceux que l'on appelle *angles d'Euler*.

Puisque nous ne nous intéressons pour l'instant qu'aux angles entre les axes de coordonnées, nous choisirons l'origine des deux systèmes au même point (fig. 47). Le plan mobile x_1x_2 coupe le plan fixe XY suivant une droite (ON sur la fig. 47) appelée *ligne nodale*. Cette ligne est évidemment perpendiculaire à la fois à l'axe Z et à l'axe x_3; nous lui donnerons pour sens positif celui qui correspond au sens du produit vectoriel $\mathbf{z} \times \mathbf{x}_3$ (où $\mathbf{z}$ et $\mathbf{x}_3$ sont les vecteurs unitaires portés par les axes Z et x_3).

Prenons comme grandeurs définissant la position des axes x_1, x_2, x_3 par rapport aux axes X, Y, Z les angles suivants: l'angle θ entre les axes Z et x_3, l'angle φ entre les axes X et N et l'angle ψ entre les axes N et x_1. [1] Les angles φ et ψ sont comptés dans le sens défini par la règle du tire-bouchon, respectivement autour des axes Z et x_3. L'angle θ prend les valeurs de zéro à π et les angles φ et ψ de zéro à 2π [2].

Exprimons maintenant les composantes du vecteur vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}$ sur les axes mobiles x_1, x_2, x_3 en fonction des angles d'Euler et de leurs dérivées. Il faut pour cela projeter sur ces axes les vitesses angulaires, $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$. La vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est dirigée

---

[1] Les angles θ, φ et ψ sont appelés ici respectivement angle de nutation, angle de précession et angle de rotation propre. (*N. d. T.*)

[2] Les angles θ et $\varphi - \pi/2$ sont respectivement l'angle polaire et l'azimut de la direction x_3 par rapport aux axes X, Y, Z. En même temps θ et $\pi/2 - \psi$ sont respectivement l'angle polaire et l'azimut de la direction Z par rapport aux axes x_1, x_2, x_3.

suivant la ligne nodale ON et ses composantes sur les axes x_1, x_2, x_3 sont

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \cos \psi, \qquad \dot{\theta}_2 = -\dot{\theta} \sin \psi, \qquad \dot{\theta}_3 = 0.$$

La vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ est dirigée suivant l'axe Z; sa projection sur l'axe x_3 est égale à $\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi} \cos \theta$, et sa projection dans le plan

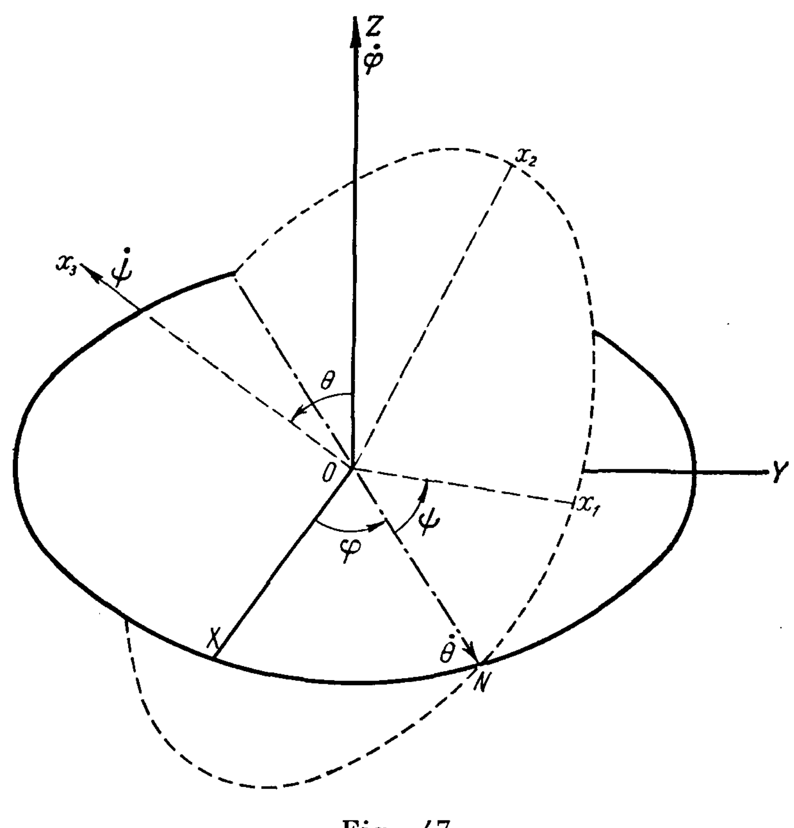


Fig. 47

$x_1 x_2$ est égale à $\dot{\varphi} \sin \theta$. Prenant les composantes de cette dernière sur les axes x_1 et x_2, nous obtenons:

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi, \qquad \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi.$$

Enfin, la vitesse angulaire $\dot{\psi}$ est dirigée suivant l'axe x_3.

Réunissant toutes ces composantes suivant chacun des axes, nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \Omega_2 &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \Omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \qquad (35,1)$$

Si l'on fait coïncider les axes x_1, x_2, x_3 avec les axes principaux d'inertie du solide, l'énergie cinétique de rotation exprimée en fonction des angles d'Euler s'obtiendra en portant (35,1) dans (32,8).

Pour une toupie symétrique, où $I_1 = I_2 \neq I_3$, on trouve après une réduction simple:

$$T_{\text{rot}} = \frac{I_1}{2}(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2. \qquad (35,2)$$

Notons que l'on peut obtenir cette expression plus simplement en utilisant le fait que le choix des directions des axes principaux d'inertie x_1, x_2 d'une toupie symétrique est arbitraire. En considérant que l'axe x_1 coïncide avec l'axe des nœuds ON, c'est-à-dire que $\psi = 0$, nous aurons pour les composantes de la vitesse angulaire les expressions plus simples

$$\Omega_1 = \dot{\theta}, \qquad \Omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta, \qquad \Omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}. \qquad (35,3)$$

Comme exemple d'application des angles d'Euler, déterminons à l'aide de ceux-ci le mouvement libre d'une toupie symétrique, que nous connaissons déjà.

Choisissons l'axe Z du système de coordonnées fixe dans la direction du moment constant $\mathbf{M}$ de la toupie. L'axe x_3 du système mobile est dirigé suivant l'axe de la toupie, et admettons que l'axe x_1 coïncide à l'instant donné avec l'axe des nœuds. Les formules (35,3) nous donnent alors pour les composantes du vecteur $\mathbf{M}$:

$$M_1 = I_1\Omega_1 = I_1\dot{\theta}, \qquad M_2 = I_1\Omega_2 = I_1\dot{\varphi}\sin\theta,$$
$$M_3 = I_3\Omega_3 = I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}).$$

D'autre part, puisque l'axe x_1 (ligne nodale) est perpendiculaire à l'axe Z, nous avons:

$$M_1 = 0, \qquad M_2 = M\sin\theta, \qquad M_3 = M\cos\theta.$$

Egalant ces expressions, nous obtenons les équations suivantes:

$$\dot{\theta} = 0, \qquad I_1\dot{\varphi} = M, \qquad I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}) = M\cos\theta. \qquad (35,4)$$

La première de ces équations donne $\theta = \text{Cte}$, c'est-à-dire que l'angle d'inclinaison de l'axe de la toupie sur la direction de $\mathbf{M}$ est constant. La seconde définit (conformément à (35,5)) la vitesse angulaire de précession $\dot{\varphi} = \frac{M}{I_1}$. Enfin, la troisième détermine la vitesse angulaire de rotation de la toupie autour de son axe propre $\Omega_3 = M\cos\theta/I_3$.

Problèmes

1. Ramener à des quadratures le problème du mouvement d'une toupie symétrique pesante dont la pointe est immobile (fig. 48).

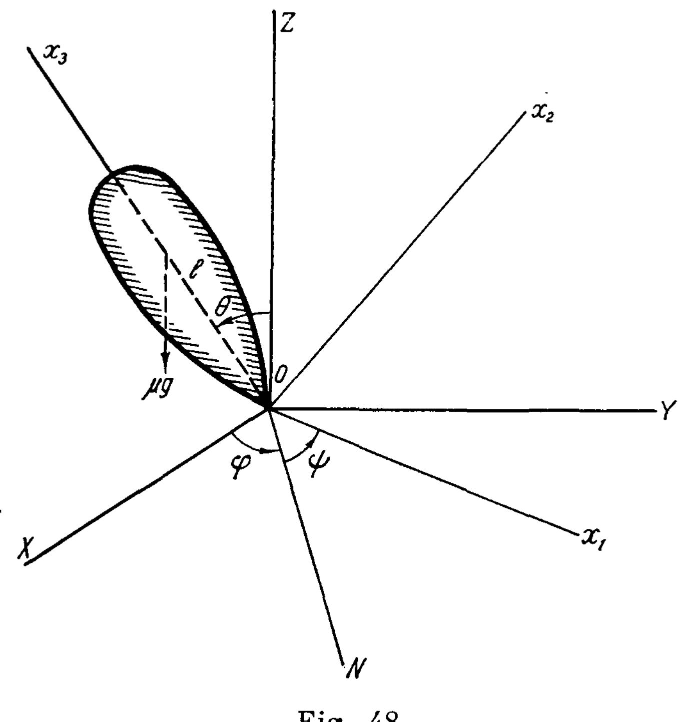


Fig. 48

Solution. Plaçons l'origine commune des systèmes de coordonnées fixe et mobile à la pointe O de la toupie, et dirigeons l'axe Z suivant la verticale (fig. 48). La fonction de Lagrange de la toupie dans le champ de gravité est

$$L=\frac{I_1+\mu l^2}{2}(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin^2\theta)+\frac{I_3}{2}(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)^2-\mu gl\cos\theta$$

(μ étant la masse de la toupie, et l la distance de la pointe au centre d'inertie).

Les coordonnées ψ et φ sont cycliques. Nous avons par suite deux intégrales premières

$$p_\psi=\frac{\partial L}{\partial\dot\psi}=I_3(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)=\text{Cte}\equiv M_3, \tag{1}$$

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=(I_1'\sin^2\theta+I_3\cos^2\theta)\dot\varphi+I_3\dot\psi\cos\theta=\text{Cte}\equiv M_z, \tag{2}$$

où $I_1'=I_1+\mu l^2$ (les grandeurs p_ψ et p_φ sont les composantes du moment de rotation, défini relativement au point O, suivant les axes x_3 et Z respectivement). En outre, il y a conservation de l'énergie

$$E=\frac{I_1'}{2}(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin^2\theta)+\frac{I_3}{2}(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)^2+\mu gl\cos\theta. \tag{3}$$

Les équations (1) et (2) nous donnent :

$$\dot{\varphi}=\frac{M_z-M_3\cos\theta}{I_1'\sin^2\theta}, \tag{4}$$

$$\dot{\psi}=\frac{M_3}{I_3}-\cos\theta\,\frac{M_z-M_3\cos\theta}{I_1'\sin^2\theta}. \tag{5}$$

Eliminant à l'aide de ces égalités $\dot{\varphi}$ et $\dot{\psi}$ de l'énergie (3), nous obtenons

$$E'=\frac{I_1'}{2}\dot{\theta}^2+U_{\text{eff}}(\theta),$$

où

$$E'=E-\frac{M_3^2}{2I_3}-\mu gl,$$

$$U_{\text{eff}}(\theta)=\frac{(M_z-M_3\cos\theta)^2}{2I_1'\sin^2\theta}-\mu gl\,(1-\cos\theta). \tag{6}$$

Tirant de là $\dot{\theta}$ et séparant les variables, il vient :

$$t=\int\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1'}(E'-U_{\text{eff}}(\theta))}} \tag{7}$$

(qui est une intégrale elliptique). Les angles ψ et φ s'expriment alors comme fonctions de θ sous la forme de quadratures à l'aide des équations (4) et (5).

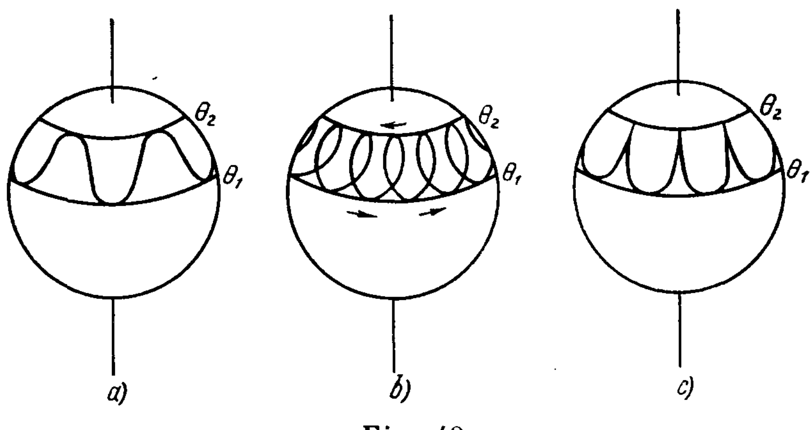


Fig. 49

Le domaine de variation de l'angle θ au cours du mouvement est défini par la condition $E'\geqslant U_{\text{eff}}(\theta)$. La fonction $U_{\text{eff}}(\theta)$ (pour $M_3\neq M_z$) tend vers $+\infty$ pour $\theta=0$ et $\theta=\pi$ et passe par un minimum dans l'intervalle compris entre ces deux valeurs. L'équation $E'=U_{\text{eff}}(\theta)$ a par conséquent deux racines qui déterminent les angles limites θ_1 et θ_2 d'inclinaison de l'axe de la toupie sur la verticale.

Lorsque l'angle θ varie de θ_1 à θ_2, le signe de la dérivée $\dot{\varphi}$ reste inchangé ou varie, selon que dans cet intervalle le signe de la différence $M_z-M_3\cos\theta$ reste inchangé ou varie. Dans le premier cas l'axe de la toupie est animé d'un mouvement de précession monotone autour de la verticale, et effectue en même temps des oscillations (mouvement de *nutation*) de bas en haut (fig. 49*a* ; la ligne ondulée représente la trace que laisserait l'axe de la toupie sur la surface

d'une sphère centrée sur la pointe de la toupie). Dans le second cas la direction de la précession est opposée sur les deux cercles limites, de sorte que l'axe de la toupie se déplace autour de la verticale en décrivant des boucles (fig. 49*b*). Enfin, si l'une des valeurs θ_1, θ_2 coïncide avec le zéro de la différence $M_z - M_3 \cos\theta$, sur le cercle limite correspondant $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$ s'annulent en même temps, de sorte que l'axe de la toupie décrit la trajectoire représentée sur la fig. 49*c*.

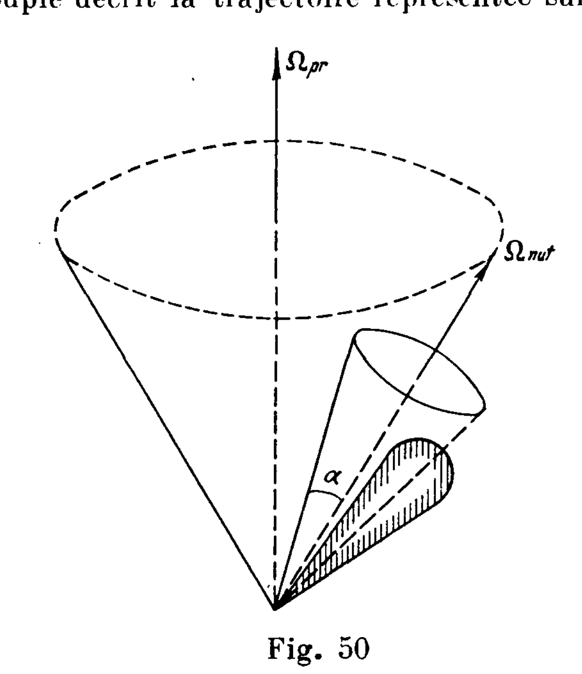


Fig. 50

2. Trouver la condition à laquelle la rotation de la toupie autour d'un axe vertical sera stable.

Solution. Pour $\theta = 0$ les axes x_3 et Z coïncident, de sorte que $M_3 = M_z$. $E' = 0$. La rotation autour de cet axe sera stable si la valeur $\theta = 0$ correspond à un minimum de la fonction $U_{\text{eff}}(\theta)$. Si les θ sont petits on a :

$$U_{\text{eff}} \simeq \left(\frac{M_3^2}{8I_1'} - \frac{\mu g l}{2}\right)\theta^2,$$

d'où la condition cherchée : $M_3^2 > 4I_1'\mu g l$, soit :

$$\Omega_3^2 > \frac{4I_1'\mu g l}{I_3^2}.$$

3. Déterminer le mouvement d'une toupie dans le cas où l'énergie cinétique de sa rotation propre est grande par rapport à l'énergie dans le champ de pesanteur (cas dit de la toupie « rapide »).

Solution. En première approximation, si on néglige le champ de pesanteur, il se produit une précession libre de l'axe de la toupie autour de la direction du moment **M** (correspondant dans le cas donné à la nutation de la toupie) ; cette précession a lieu conformément à (33,5) avec la vitesse angulaire

$$\mathbf{\Omega}_{\text{nut}} = \frac{\mathbf{M}}{I_1'}. \tag{1}$$

En seconde approximation apparaît une précession lente du moment **M** autour de la verticale (fig. 50). Pour déterminer la vitesse de cette précession calculons la moyenne pour une période de la nutation de l'équation exacte du

mouvement (34,3)

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}=\mathbf{K}.$$

Le moment des forces de pesanteur agissant sur la toupie est $\mathbf{K} = \mu l\,(\mathbf{n}_3 \times \mathbf{g})$ où $\mathbf{n}_3$ est le vecteur unitaire sur l'axe de la toupie. Des considérations de symétrie montrent avec évidence que le calcul de la moyenne de $\mathbf{K}$ pour le « cône de nutation » revient à remplacer le vecteur $\mathbf{n}_3$ par sa projection $\cos\alpha\cdot\frac{\mathbf{M}}{M}$ sur $\mathbf{M}$ (α étant l'angle entre $\mathbf{M}$ et l'axe de la toupie). On obtient ainsi l'équation

$$\frac{d\overline{\mathbf{M}}}{dt}=-\cos\alpha\frac{\mu l}{M}(\mathbf{g}\times\mathbf{M}).$$

Elle signifie que le vecteur $\mathbf{M}$ est animé d'un mouvement de précession autour de la direction de $\mathbf{g}$ (verticale) avec une vitesse angulaire moyenne

$$\overline{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathrm{pr}}=-\frac{\mu l\cos\alpha}{M}\mathbf{g} \tag{2}$$

(petite par rapport à Ω_{nut}).

Dans l'approximation considérée, les grandeurs $\mathbf{M}$ et $\cos\alpha$ que renferment les formules (1) et (2) sont des constantes (bien que n'étant pas, strictement parlant, des intégrales premières). Elles sont liées avec la même approximation aux grandeurs strictement conservatives E et M_3 par les relations

$$M_3=M\cos\alpha,$$

$$E\simeq\frac{M^2}{2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{I_3}+\frac{\sin^2\alpha}{I_1'}\right).$$

§ 36. Equations d'Euler

Les équations du mouvement écrites au § 34 sont rapportées à un système de coordonnées fixe: les dérivées $d\mathbf{P}/dt$ et $d\mathbf{M}/dt$ dans les équations (34,1) et (34,3) représentent les variations des vecteurs $\mathbf{P}$ et $\mathbf{M}$ par rapport à ce système. Cependant, c'est dans un système de coordonnées mobile, dont les axes sont dirigés suivant les axes principaux d'inertie, qu'on a la relation la plus simple entre les composantes du moment de rotation $\mathbf{M}$ du solide et celles, de la vitesse angulaire. Pour pouvoir utiliser cette relation, il faut au préalable transformer des équations du mouvement dans un système mobile de coordonnées x_1, x_2, x_3.

Soit $d\mathbf{A}/dt$ la vitesse de variation d'un vecteur $\mathbf{A}$ par rapport au système fixe. Si dans un système tournant le vecteur $\mathbf{A}$ ne change pas, sa variation relative au système fixe sera due uniquement à la rotation, et on aura alors

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{A}$$

(voir § 9, où nous avons montré que des formules telles que (9,1) et (9,2) sont valables pour tout vecteur). Dans le cas général, on doit ajouter au second membre de cette égalité la vitesse de varia-

tion du vecteur **A** par rapport au système mobile; en désignant par $d'\mathbf{A}/dt$ cette vitesse, on obtient:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{d'\mathbf{A}}{dt}+\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{A}. \tag{36,1}$$

A l'aide de cette formule générale, nous pouvons réécrire tout de suite les équations (34,1) et (34,3) sous la forme

$$\frac{d'\mathbf{P}}{dt}+\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{P}=\mathbf{F},\quad \frac{d'\mathbf{M}}{dt}+\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{M}=\mathbf{K}. \tag{36,2}$$

Puisque la dérivation par rapport au temps est effectuée ici dans le système mobile, nous pouvons projeter directement les équations sur les axes de ce système, en écrivant

$$\left(\frac{d'\mathbf{P}}{dt}\right)_1=\frac{dP_1}{dt},\ \ldots,\ \left(\frac{d'\mathbf{M}}{dt}\right)_1=\frac{dM_1}{dt},\ \ldots,$$

où les indices 1, 2, 3 désignent les composantes sur les axes x_1, x_2, x_3. Ceci fait, remplaçons dans la première équation **P** par $\mu\mathbf{V}$ et nous obtenons:

$$\begin{aligned}
\mu\left(\frac{dV_1}{dt}+\Omega_2V_3-\Omega_3V_2\right)&=F_1,\\
\mu\left(\frac{dV_2}{dt}+\Omega_3V_1-\Omega_1V_3\right)&=F_2,\\
\mu\left(\frac{dV_3}{dt}+\Omega_1V_2-\Omega_2V_1\right)&=F_3.
\end{aligned} \tag{36,3}$$

En choisissant les axes x_1, x_2, x_3, tels qu'ils coïncident avec les axes principaux d'inertie, écrivons dans la 2e équation (36,2) $M_1=I_1\Omega_1$, etc., et nous obtenons:

$$\begin{aligned}
I_1\frac{d\Omega_1}{dt}+(I_3-I_2)\,\Omega_2\Omega_3&=K_1,\\
I_2\frac{d\Omega_2}{dt}+(I_1-I_3)\,\Omega_3\Omega_1&=K_2,\\
I_3\frac{d\Omega_3}{dt}+(I_2-I_1)\,\Omega_1\Omega_2&=K_3.
\end{aligned} \tag{36,4}$$

Les équations (36,4) sont appelées *équations d'Euler*.

Pour une rotation libre $\mathbf{K}=0$, de sorte que les équations d'Euler prennent la forme

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega_1}{dt}+\frac{I_3-I_2}{I_1}\,\Omega_2\Omega_3&=0,\\
\frac{d\Omega_2}{dt}+\frac{I_1-I_3}{I_2}\,\Omega_3\Omega_1&=0,\\
\frac{d\Omega_3}{dt}+\frac{I_2-I_1}{I_3}\,\Omega_1\Omega_2&=0.
\end{aligned} \tag{36,5}$$

A titre d'exemple, appliquons ces équations à la rotation de la toupie symétrique, que nous avons étudiée plus haut. Posant $I_1 = I_2$, la troisième équation nous donne $\dot{\Omega}_3 = 0$, c'est-à-dire $\Omega_3 = \text{Cte}$. Ecrivons ensuite les deux premières équations sous la forme

$$\dot{\Omega}_1 = -\omega\Omega_2, \quad \dot{\Omega}_2 = \omega\Omega_1,$$

où on a introduit la grandeur constante

$$\omega = \Omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1}. \tag{36,6}$$

Multipliant la seconde équation par i et l'ajoutant à la première, il vient :

$$\frac{d}{dt}(\Omega_1 + i\Omega_2) = i\omega(\Omega_1 + i\Omega_2),$$

d'où

$$\Omega_1 + i\Omega_2 = Ae^{i\omega t},$$

où A est constante ; on peut considérer celle-ci comme réelle (cela revient à choisir convenablement l'origine du temps), et on a alors

$$\Omega_1 = A\cos\omega t, \quad \Omega_2 = A\sin\omega t. \tag{36,7}$$

Ce résultat montre que la projection de la vitesse angulaire sur un plan perpendiculaire à l'axe de la toupie tourne dans ce plan avec une vitesse angulaire ω, tout en restant constante en grandeur ($\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} = A$). Puisque la projection de Ω_3 sur l'axe de la toupie est également constante, nous en concluons que le vecteur $\mathbf{\Omega}$ tout entier tourne uniformément autour de l'axe de la toupie avec une vitesse angulaire ω, sa grandeur restant la même. Compte tenu des relations $M_1 = I_1\Omega_1$, $M_2 = I_2\Omega_2$, $M_3 = I_3\Omega_3$ entre les composantes des vecteurs $\mathbf{\Omega}$ et $\mathbf{M}$, il est évident que le vecteur moment $\mathbf{M}$ effectue le même mouvement (par rapport à l'axe de la toupie).

Il va de soi que le tableau ainsi obtenu représente simplement un autre aspect du mouvement de la toupie déjà étudié aux §§ 33 et 35 par rapport à un système de coordonnées fixe. En particulier, la vitesse angulaire de rotation du vecteur $\mathbf{M}$ (axe Z sur la fig. 48) autour de la direction de x_3 exprimée en fonction des angles d'Euler coïncide avec la vitesse angulaire $-\dot{\psi}$. Les équations (35,4) nous donnent :

$$\dot{\psi} = \frac{M\cos\theta}{I_3} - \dot{\varphi}\cos\theta = M\cos\theta\left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1}\right)$$

ou

$$-\dot{\psi} = \Omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1},$$

ce qui concorde avec (36,6).

§ 37. Toupie asymétrique

Utilisons les équations d'Euler dans le problème plus complexe de la rotation libre d'une toupie asymétrique, dont les trois moments d'inertie sont différents. Pour fixer les idées nous poserons

$$I_3 > I_2 > I_1. \tag{37,1}$$

Deux intégrales des équations d'Euler sont connues d'avance. Elles sont données par les lois de conservation de l'énergie et du moment et s'expriment par les égalités:

$$\begin{aligned} I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2 &= 2E, \\ I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2 &= M^2, \end{aligned} \tag{37,2}$$

où l'énergie E et la valeur absolue M du moment sont des constantes données. Ces mêmes égalités exprimées en fonction des composantes du vecteur $\mathbf{M}$ s'écrivent

$$\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} = 2E, \tag{37,3}$$

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M^2. \tag{37,4}$$

On peut déjà en tirer quelques conclusions quant au caractère du mouvement de la toupie. Remarquons pour cela que géométriquement, dans les axes M_1, M_2, M_3, les équations (37,3) et (37,4) représentent respectivement les équations de la surface d'un ellipsoïde de demi-axes

$$\sqrt{2EI_1}, \quad \sqrt{2EI_2}, \quad \sqrt{2EI_3}$$

et d'une sphère de rayon M. Lorsque le vecteur $\mathbf{M}$ se déplace (par rapport aux axes d'inertie de la toupie), son extrémité se meut le long de l'intersection des surfaces en question (la fig. 51 représente un certain nombre de ces intersections de l'ellipsoïde avec des sphères de différents rayons). L'existence même d'une intersection est rendue possible par les inégalités évidentes

$$2EI_1 < M^2 < 2EI_3, \tag{37,5}$$

qui signifient géométriquement que le rayon de la sphère (37,4) est compris entre le plus petit et le plus grand des demi-axes de l'ellipsoïde (37,3).

Suivons le changement de caractère de ces « trajectoires » de l'extrémité du vecteur $\mathbf{M}$ [1], à mesure que sa valeur M varie (pour une énergie E donnée). Lorsque M^2 n'est que légèrement supérieur à $2EI_1$, la sphère coupe l'ellipsoïde suivant deux petites courbes

[1] Les courbes analogues décrites par l'éxtrémité du vecteur $\mathbf{\Omega}$ sont appelées *polhodies*.

fermées qui entourent l'axe x_1 au voisinage des deux pôles correspondants de l'ellipsoïde (quand $M^2 \to 2EI_1$, ces courbes tendent à se confondre avec les pôles). A mesure que M^2 croît, les courbes s'élargissent, et pour $M^2 = 2EI_2$ se réduisent à deux courbes planes (ellipses) qui se coupent aux sommets de l'axe x_2. Lorsque M^2 continue à croître, il apparaît de nouveau deux trajectoires fermées distinctes, mais qui entourent cette fois les sommets de l'axe x_3; elles se réduisent à ces deux points quand $M^2 \to 2EI_3$.

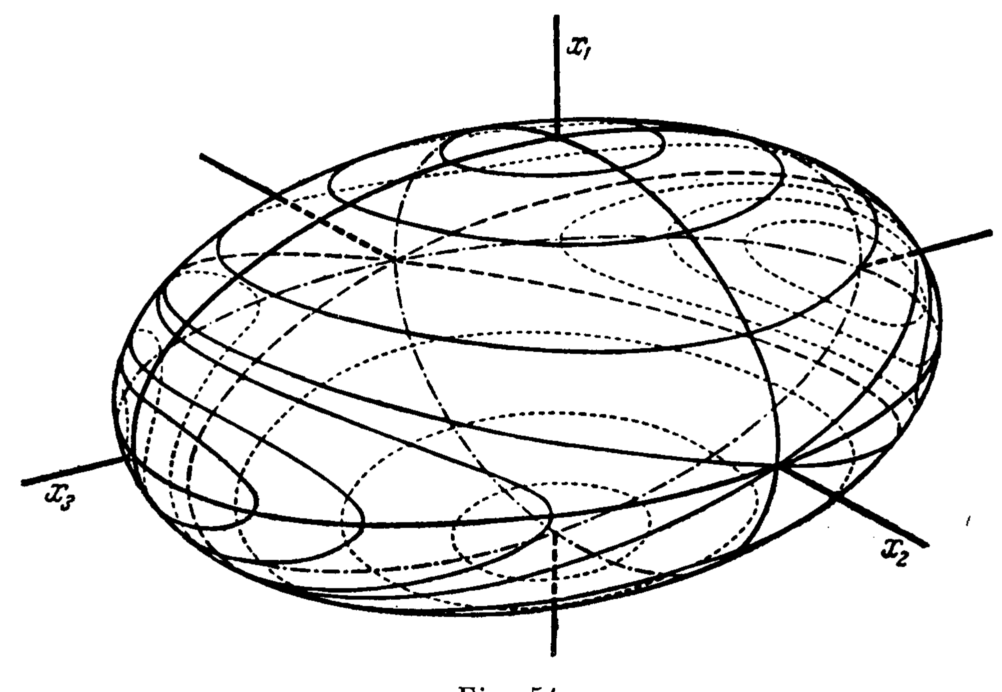


Fig. 51

Remarquons tout d'abord que le fait que les trajectoires sont fermées signifie que le déplacement du vecteur **M** par rapport au corps de la toupie est périodique; au cours d'une période le vecteur **M**, en revenant à sa position première, décrit une surface conique.

Remarquons ensuite le caractère essentiellement différent des trajectoires voisines des différents sommets de l'ellipsoïde. Au voisinage des axes x_1 et x_3 les trajectoires entourent complètement les sommets, mais celles qui passent au voisinage des sommets de l'axe x_2 s'écartent ensuite à une grande distance de ces points. Cette différence tient à la stabilité différente de la rotation de la toupie autour de ses trois axes d'inertie. La rotation autour des axes x_1 et x_3 (correspondant au plus grand et au plus petit des trois moments d'inertie de la toupie) est stable en ce sens que pour une petite perturbation de ces états, la toupie continuera à effectuer un mouvement proche du mouvement initial. Par contre, la rotation autour de l'axe x_2 est instable; un petit écart suffit pour provoquer un mouvement qui emporte la toupie loin de sa position initiale.

Pour déterminer la relation entre les composantes de $\mathbf{\Omega}$ (ou celles de $\mathbf{M}$ qui leur sont proportionnelles) et le temps, revenons aux équations d'Euler (36,5). Exprimons Ω_1 et Ω_3 en fonction de Ω_2 à l'aide des deux équations (37,2) et de (37,3)

$$\Omega_1^2 = \frac{1}{I_1(I_3-I_1)}\{(2EI_3-M^2)-I_2(I_3-I_2)\Omega_2^2\},$$
$$\Omega_3^2 = \frac{1}{I_3(I_3-I_1)}\{(M^2-2EI_1)-I_2(I_2-I_1)\Omega_2^2\} \tag{37,6}$$

et portons dans la seconde des équations (36,5), il vient:

$$\frac{d\Omega_2}{dt} = \frac{I_3-I_1}{I_2}\Omega_1\Omega_3 = \frac{1}{I_2\sqrt{I_1I_3}}\{[(2EI_3-M^2)-$$
$$-I_2(I_3-I_2)\Omega_2^2][(M^2-2EI_1)-I_2(I_2-I_1)\Omega_2^2]\}^{1/2}. \tag{37,7}$$

Séparant les variables et intégrant, nous obtenons une fonction $t(\Omega_2)$ sous forme d'une intégrale elliptique. Pour réduire celle-ci à la forme standard, nous poserons pour fixer les idées

$$M^2 > 2EI_2$$

dans le cas contraire il faut intervertir les indices 1 et 3 dans toutes les formules ci-dessous). Au lieu de t et Ω_2 prenons les nouvelles variables

$$\tau = t\sqrt{\frac{(I_3-I_2)(M^2-2EI_1)}{I_1I_2I_3}},$$
$$s = \Omega_2\sqrt{\frac{I_2(I_3-I_2)}{2EI_3-M^2}} \tag{37,8}$$

et faisons intervenir le paramètre positif[1] $k^2 > 1$ donné par

$$k^2 = \frac{(I_2-I_1)(2EI_3-M^2)}{(I_3-I_2)(M^2-2EI_1)}. \tag{37,9}$$

Nous obtenons alors

$$\tau = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

(nous convenons de choisir l'origine des temps telle que $\Omega_2=0$ pour $t=0$). La fonction inverse $s(\tau)$ constitue, on le sait, l'une des fonctions elliptiques de Jacobi:

$$s = \operatorname{sn}\tau,$$

qui détermine également Ω_2 en fonction du temps. Les fonctions $\Omega_1(t)$ et $\Omega_3(t)$ s'expriment algébriquement à l'aide de $\Omega_2(t)$ d'après

[1] Appelé *module* des fonctions elliptiques définies plus bas (*N. d. T.*)

les égalités (37,6). Compte tenu de la définition des deux autres fonctions elliptiques

$$\operatorname{cn}\tau=\sqrt{1-\operatorname{sn}^2\tau},\quad \operatorname{dn}\tau=\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2\tau},$$

nous obtenons finalement les formules suivantes

$$\begin{aligned}\Omega_1&=\sqrt{\frac{2EI_3-M^2}{I_1(I_3-I_1)}}\operatorname{cn}\tau,\\ \Omega_2&=\sqrt{\frac{2EI_3-M^2}{I_2(I_3-I_2)}}\operatorname{sn}\tau,\\ \Omega_3&=\sqrt{\frac{M^2-2EI_1}{I_3(I_3-I_1)}}\operatorname{dn}\tau.\end{aligned}\tag{37,10}$$

Les fonctions (37,10) sont périodiques, leur période par rapport à la variable τ étant, comme on le sait, égale à $4K$, où K est l'intégrale elliptique complète de première espèce

$$K=\int_0^1\frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}=\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2u}}.\tag{37,11}$$

La période par rapport au temps est donc donnée par l'expression

$$T=4K\sqrt{\frac{I_1I_2I_3}{(I_3-I_2)(M^2-2EI_1)}}.\tag{37,12}$$

Au bout de ce temps le vecteur $\mathbf{\Omega}$ revient à sa position initiale par rapport aux axes de la toupie. (Ce qui ne signifie nullement que la toupie elle-même revient à sa position première relativement au système de coordonnées fixe; voir plus bas.)

Pour $I_1=I_2$ les formules (37,10) se ramènent évidemment aux formules obtenues au paragraphe précédent pour la toupie symétrique. En effet, lorsque $I_1\to I_2$ le paramètre $k^2\to 0$ et les fonctions elliptiques dégénèrent, en se réduisant à des fonctions circulaires

$$\operatorname{sn}\tau\to\sin\tau,\qquad \operatorname{cn}\tau\to\cos\tau,\qquad \operatorname{dn}\tau\to 1,$$

et nous retrouverons les formules (36,7).

Pour $M^2=2EI_3$ on a $\Omega_1=\Omega_2=0$, $\Omega_3=\text{Cte}$, c'est-à-dire que le vecteur $\mathbf{\Omega}$ est constamment dirigé le long de l'axe d'inertie x_3; ce cas correspond à une rotation uniforme de la toupie autour de l'axe x_3. De la même façon, pour $M^2=2EI_1$ (alors $\tau\equiv 0$) on a une rotation également permanente autour de l'axe x_1.

Déterminons maintenant en fonction du temps le mouvement absolu de la toupie dans l'espace (absolu par rapport au système fixe X, Y, Z). Utilisons pour cela les angles d'Euler ψ, φ, θ entre les axes de la toupie x_1, x_2, x_3 et les axes X, Y, Z, en choisissant l'axe fixe Z le long du vecteur constant $\mathbf{M}$. Puisque l'angle polaire et

l'azimut de la direction de Z par rapport aux axes x_1, x_2, x_3 sont respectivement égaux à θ et $\frac{\pi}{2} - \psi$ (voir note 2, p. 152), on obtient en projetant le vecteur $\mathbf{M}$ sur les axes x_1, x_2, x_3:

$$\begin{aligned} M \sin\theta \sin\psi &= M_1 = I_1\Omega_1, \\ M \sin\theta \cos\psi &= M_2 = I_2\Omega_2, \\ M \cos\theta &= M_3 = I_3\Omega_3. \end{aligned} \tag{37,13}$$

D'où

$$\cos\theta = \frac{I_3\Omega_3}{M}, \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{I_1\Omega_1}{I_2\Omega_2}, \tag{37,14}$$

et, compte tenu des formules (37,10):

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \sqrt{\frac{I_3(M^2-2EI_1)}{M^2(I_3-I_1)}}\,\operatorname{dn}\tau, \\ \operatorname{tg}\psi &= \sqrt{\frac{I_1(I_3-I_2)}{I_2(I_3-I_1)}}\,\frac{\operatorname{cn}\tau}{\operatorname{sn}\tau}, \end{aligned} \tag{37,15}$$

ce qui détermine θ et ψ en fonction du temps; ce sont, avec les composantes du vecteur $\mathbf{\Omega}$, des fonctions périodiques de période (37,12).

L'angle φ n'entre pas dans les formules (37,13), et pour le calculer il faut revenir aux formules (35,1), qui expriment les composantes de $\mathbf{\Omega}$ en fonction des dérivées des angles d'Euler par rapport au temps. Eliminant $\dot{\theta}$ des égalités

$$\Omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi,$$

$$\Omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi,$$

nous obtenons

$$\dot{\varphi} = \frac{\Omega_1\sin\psi + \Omega_2\cos\psi}{\sin\theta},$$

et les formules (37,13) nous donnent alors

$$\frac{d\varphi}{dt} = M\,\frac{I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2}{I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2}. \tag{37,16}$$

De là, la fonction $\varphi(t)$ est déterminée par une quadrature, mais l'expression sous le signe somme contient les fonctions elliptiques sous une forme complexe. A l'aide d'un certain nombre de transformations assez compliquées, on peut exprimer cette intégrale au moyen de la fonction dite « fonction thêta ». Sans effectuer les calculs, indiquons seulement leur résultat.

La fonction $\varphi(t)$ peut être représentée (à une constante additive arbitraire près) par une somme de deux termes

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t), \tag{37,17}$$

dont l'un est donné par la formule

$$e^{2i\varphi_1(t)}=\frac{\vartheta_{01}\left(\frac{2t}{T}-i\alpha\right)}{\vartheta_{01}\left(\frac{2t}{T}+i\alpha\right)}, \tag{37,18}$$

où ϑ_{01} est la fonction thêta, et α une constante réelle définie par l'égalité

$$\operatorname{sn}(i2\alpha K)=i\sqrt{\frac{I_3(M^2-2EI_1)}{I_1(2EI_3-M^2)}} \tag{37,19}$$

(K et T étant tirés de (37,11) et (37,12)). La fonction dans le second membre de (37,18) est périodique de période $T/2$, de sorte que $\varphi_1(t)$ varie de 2π pendant le temps T. Le second terme de (37,17) est donné par la formule

$$\varphi_2(t)=2\pi\frac{t}{T'}, \qquad \frac{1}{T'}=\frac{M}{2\pi I_1}-\frac{i}{\pi T}\frac{\vartheta'_{01}(i\alpha)}{\vartheta_{01}(i\alpha)}. \tag{37,20}$$

Cette fonction augmente de 2π pendant le temps T'. Ainsi, le mouvement suivant l'angle φ se présente comme l'ensemble de deux variations périodiques; l'une des périodes (T) coïncide avec la période de variation des angles ψ et θ, et l'autre (T') n'a pas de commune mesure avec la première. Cette dernière circonstance entraîne que la toupie ne revient jamais rigoureusement à sa position initiale.

Problèmes

1. Déterminer la rotation libre d'une toupie autour d'un axe voisin de l'axe d'inertie x_3 (ou x_1).

Solution. Supposons l'axe x_3 voisin de la direction de **M**. Les composantes M_1 et M_2 sont alors petites, et la composante $M_3 \simeq M$ (aux infiniment petits du premier ordre près). Avec la même approximation les deux premières équations d'Euler (36,5) s'écrivent

$$\frac{dM_1}{dt}=\left(1-\frac{I_3}{I_2}\right)\Omega_0 M_2,$$

$$\frac{dM_2}{dt}=\left(\frac{I_3}{I_1}-1\right)\Omega_0 M_1,$$

où nous avons introduit la constante $\Omega_0=M/I_3$. Suivant la règle générale, cherchons pour M_1 et M_2 une solution proportionnelle à $e^{i\omega t}$, et nous obtenons pour la fréquence ω la valeur

$$\omega=\Omega_0\sqrt{\left(\frac{I_3}{I_1}-1\right)\left(\frac{I_3}{I_2}-1\right)}. \tag{1}$$

Pour M_1 et M_2 eux-mêmes nous obtenons

$$M_1=Ma\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\cos\omega t, \qquad M_2=Ma\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}\sin\omega t, \tag{2}$$

où a est une constante arbitraire petite. Ces formules déterminent le mouvement du vecteur **M** relativement à la toupie; dans la construction de la fig. 51, l'extrémité du vecteur **M** décrit (avec la fréquence ω) une petite ellipse autour du sommet de l'axe x_3.

Pour déterminer le mouvement absolu de la toupie dans l'espace, calculons ses angles d'Euler. Dans le cas donné l'angle d'inclinaison θ de l'axe x_3 sur l'axe Z (direction de **M**) est petit, et on a d'après les formules (37,14)

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{M_1}{M_2},$$

$$\theta^2 \simeq 2(1-\cos\theta)=2\left(1-\frac{M_3}{M}\right) \simeq \frac{M_1^2+M_2^2}{M^2};$$

tenant compte de (2), nous obtenons

$$\operatorname{tg}\psi=\sqrt{\frac{I_1(I_3-I_2)}{I_2(I_3-I_1)}}\operatorname{ctg}\omega t,$$

$$\theta^2=a^2\left[\left(\frac{I_3}{I_2}-1\right)\cos^2\omega t+\left(\frac{I_3}{I_1}-1\right)\sin^2\omega t\right]. \qquad (3)$$

Pour calculer l'angle φ remarquons que d'après la troisième des formules (35,1) et pour $\theta \ll 1$:

$$\Omega_0 \simeq \Omega_3 \simeq \dot\psi+\dot\varphi.$$

Par suite,

$$\varphi=\Omega_0 t-\psi \qquad (4)$$

(où la constante d'intégration est omise).

On obtiendra une représentation plus concrète du caractère du mouvement de la toupie en suivant directement les changements de direction de ses trois axes d'inertie (nous désignerons par $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ les vecteurs unitaires le long de ces trois axes). Les vecteurs $\mathbf{n}_1$ et $\mathbf{n}_2$ tournent uniformément dans le plan XY avec la fréquence Ω_0 effectuant en même temps de petites oscillations transversales de fréquence ω; ces oscillations sont définies par les composantes sur Z des vecteurs en question, pour lesquelles nous avons

$$n_{1Z} \simeq \frac{M_1}{M}=a\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\cos\omega t,$$

$$n_{2Z} \simeq \frac{M_2}{M}=a\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}\sin\omega t.$$

Pour le vecteur $\mathbf{n}_3$ on a avec la même précision:

$$n_{3x} \simeq \theta\sin\varphi, \quad n_{3y} \simeq -\theta\cos\varphi, \quad n_{3z} \simeq 1$$

(l'angle polaire et l'azimut de la direction de $\mathbf{n}_3$ par rapport aux axes X, Y, Z sont égaux à θ et $\varphi-\frac{\pi}{2}$; voir note 2, p. 152). Ecrivons ensuite (en utilisant les formules (37,13)):

$$n_{3x}=\theta\sin(\Omega_0 t-\psi)=\theta\sin\Omega_0 t\cos\psi-\theta\cos\Omega_0 t\sin\psi=$$

$$=\frac{M_2}{M}\sin\Omega_0 t-\frac{M_1}{M}\cos\Omega_0 t=a\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}\sin\Omega_0 t\sin\omega t-$$

$$-a\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\cos\Omega_0 t\cos\omega t,$$

soit finalement

$$n_{3x} = -\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}+\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}\right)\cos(\Omega_0+\omega)\,t+$$
$$+\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}-\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\right)\cos(\Omega_0-\omega)\,t.$$

De la même façon

$$n_{3y} = -\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}+\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\right)\sin(\Omega_0+\omega)\,t+$$
$$+\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}-\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\right)\sin(\Omega_0+\omega)\,t.$$

D'où il est clair que le mouvement du vecteur $\mathbf{n}_3$ se présente comme la superposition de deux rotations de fréquences $(\Omega_0 \pm \omega)$ autour de l'axe Z.

2. Déterminer la rotation libre d'une toupie pour $M^2 = 2EI_2$.

Solution. Dans la construction de la fig. 51, ce cas correspond au déplacement de l'extrémité du vecteur **M** sur une courbe passant par le pôle sur l'axe x_2.

L'équation (37,7) prend la forme

$$\frac{ds}{d\tau}=1-s^2, \quad \tau = t\sqrt{\frac{(I_2-I_1)(I_3-I_2)}{I_1I_3}}\,\Omega_0,$$
$$s=\frac{\Omega_2}{\Omega_0},$$

où on a posé $\Omega_0=\frac{M}{I_2}=\frac{2E}{M}$. En intégrant cette équation, puis en utilisant les formules (37,6), nous obtenons

$$\Omega_1=\Omega_0\sqrt{\frac{I_2(I_3-I_2)}{I_1(I_3-I_1)}}\,\frac{1}{\operatorname{ch}\tau},$$
$$\Omega_2=\Omega_0\operatorname{th}\tau,$$
$$\Omega_3=\Omega_0\sqrt{\frac{I_2(I_2-I_1)}{I_3(I_3-I_1)}}\,\frac{1}{\operatorname{ch}\tau}.$$

Pour décrire le mouvement absolu de la toupie, faisons intervenir les angles d'Euler, en définissant θ comme l'angle formé par l'axe Z (direction de **M**) et l'axe d'inertie x_2 de la toupie (et non x_3 comme dans le texte). Dans les formules (37,14) et (37,16) qui relient les composantes du vecteur $\mathbf{\Omega}$ aux angles d'Euler, il faut alors effectuer la permutation d'indices $123 \to 312$. Portant ensuite dans ces formules des expressions (1), nous obtenons

$$\cos\theta=\operatorname{th}\tau, \quad \varphi=\Omega_0 t+\text{Cte},$$
$$\operatorname{tg}\psi=\sqrt{\frac{I_3(I_2-I_1)}{I_1(I_3-I_2)}}.$$

Les formules obtenues montrent que le vecteur $\mathbf{\Omega}$ tend asymptotiquement (quand $t\to\infty$) vers l'axe x_2, qui lui-même tend asymptotiquement vers Z.

§ 38. Contact des corps solides

Comme le montrent les équations du mouvement (34,1) et (34,3), on peut formuler les *conditions d'équilibre* d'un solide en annulant la force totale et le moment total des forces qui agissent sur lui:

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{K} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f} = 0. \tag{38,1}$$

La sommation concerne ici toutes les forces extérieures appliquées au corps, et $\mathbf{r}$ représente les rayons vecteurs des « points d'application » de ces forces; le point (origine des coordonnées) par rapport auquel sont définis les moments peut être choisi arbitrairement: pour $\mathbf{F} = 0$, la valeur de $\mathbf{K}$ ne dépend pas de ce choix [voir (34,5)].

Si nous avons affaire à un système de corps solides en contact les uns avec les autres, il y a équilibre lorsque les conditions (38,1) sont satisfaites pour chaque corps séparément. On doit alors inclure dans les forces considérées celles qui agissent sur le corps donné de la part des autres corps qui sont en contact avec lui. Ces forces sont appliquées aux points de contact des corps et sont appelées *forces de réaction*. Il est évident que pour chaque couple de corps, les forces de réaction réciproques sont égales et de sens contraire.

Dans le cas général, les valeurs et les directions des réactions seront déterminées en résolvant le système des équations d'équilibre (38,1) pour tous les corps à la fois. Dans certains cas, cependant, la direction des forces de réaction peut être donnée par les conditions mêmes du problème. Ainsi, si deux corps peuvent glisser librement sur la surface l'un de l'autre, les forces de réaction seront dirigées suivant la normale à cette surface.

Si les corps en contact sont en mouvement les uns par rapport aux autres, il apparaîtra, outre les forces de réaction, des forces ayant un caractère dissipatif: les *forces de frottement*.

Deux types de mouvements sont possibles pour les corps en contact: *glissement* et *roulement*. En cas de glissement, les réactions sont perpendiculaires aux surfaces en contact, et les forces de frottement dirigées suivant les tangentes à ces surfaces.

Le roulement pur est caractérisé par le fait qu'aux points de contact il n'y a pas de mouvement des corps les uns par rapport aux autres; en d'autres termes, le corps roulant est comme fixé à chaque instant au point de contact. La direction de la force de réaction est alors quelconque, c'est-à-dire qu'elle n'est pas nécessairement normale aux surfaces en contact. Quant au frottement, il apparaît ici comme un moment de force supplémentaire, opposé au roulement.

Si, lors d'un glissement, le frottement est suffisamment petit pour qu'on puisse le négliger complètement, les surfaces des corps sont dites *parfaitement lisses*. Au contraire, si les propriétés de surface

des corps n'admettent qu'un roulement pur, sans glissement, et si lors de ce roulement le frottement peut être négligé, les surfaces sont dites *parfaitement rugueuses.*

Dans ces deux cas, les forces de frottement ne figurent pas explicitement dans le problème du mouvement des corps, de sorte que celui-ci est purement mécanique. Le mouvement ne sera pas un processus purement mécanique si les propriétés concrètes du frottement y jouent un rôle essentiel (voir § 25).

Le contact des corps diminue le nombre de leurs degrés de liberté, par rapport à celui qu'ils possédaient pour un mouvement libre. Jusqu'à présent, en étudiant ce genre de problème, nous avons tenu compte de cette circonstance en faisant intervenir des coordonnées qui correspondaient directement au nombre réel de degrés de liberté. Lors du roulement des corps cependant, un tel choix des coordonnées peut s'avérer impossible.

La condition à imposer au mouvement de roulement consiste en ce que les vitesses des points de contact doivent être égales (ainsi, pour un corps roulant sur une surface immobile, la vitesse du point de contact doit être nulle). Dans le cas général cette condition est exprimée par des *équations de liaison* du type

$$\sum_i c_{\alpha i}\dot{q}_i = 0, \tag{38,2}$$

où les $c_{\alpha i}$ sont fonctions des seules coordonnées (l'indice α numérote les équations de liaison). Si les membres de gauche de ces égalités ne sont pas des dérivées totales par rapport au temps de fonctions des coordonnées, ces équations ne peuvent être intégrées. En d'autres termes, elles ne se ramènent pas à des relations entre les seules coordonnées que l'on pourrait utiliser pour exprimer la position des corps par un nombre moindre de coordonnées correspondant au nombre réel des degrés de liberté. De telles liaisons sont dites *non holonomes* (par opposition aux liaisons dites *holonomes* qui ne relient que les coordonnées du système).

Considérons par exemple le roulement d'une sphère sur une surface plane. Notons comme d'habitude par $\mathbf{V}$ la vitesse du mouvement de translation (vitesse du centre de la sphère), et par $\mathbf{\Omega}$ la vitesse angulaire de sa rotation. On obtient la vitesse du point de contact de la sphère et du plan en posant $\mathbf{r} = -a\mathbf{n}$ dans la formule générale $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$ (où a est le rayon de la sphère, et $\mathbf{n}$ le vecteur unitaire de la normale au plan de roulement, au point de contact). La liaison cherchée est représentée par la condition qu'il n'y ait pas de glissement au point de contact, c'est-à-dire qu'elle est donnée par l'équation

$$\mathbf{V} - a(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{n}) = 0. \tag{38,3}$$

Cette équation n'est pas intégrable : en effet, bien que la vitesse **V** soit la dérivée totale par rapport au temps du rayon vecteur « centre de la sphère », la vitesse angulaire, par contre, n'est pas en général la dérivée totale de telle ou telle coordonnée. De sorte que la liaison (38,3) est non holonome [1].

Puisqu'on ne peut pas utiliser les équations de liaisons non holonomes pour réduire le nombre des coordonnées, on doit inévitablement, lorsqu'on a de telles liaisons, utiliser des coordonnées non toutes indépendantes. Pour établir les équations de Lagrange correspondantes, revenons au principe de moindre action.

La présence de liaisons du type (38,2) impose des limites déterminées aux valeurs possibles des variations des coordonnées. Notamment, en multipliant ces équations par δt, on trouve que les variations δq_i ne sont pas indépendantes, mais liées par

$$\sum_i c_{\alpha i}\delta q_i = 0. \tag{38,4}$$

Il faut tenir compte de cette circonstance lorsqu'on donne une variation à l'action. Selon la méthode générale, due à Lagrange, de recherche des conditions d'extremum, il faut ajouter à l'expression sous le signe somme de la variation de l'action

$$\delta S = \int \sum_i \delta q_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) dt$$

les équations (38,4) multipliées par les facteurs indéterminés λ_α (fonctions des coordonnées), puis imposer la condition que l'intégrale s'annule. On peut alors considérer toutes les variations δq_i comme indépendantes et on obtient les équations

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_\alpha \lambda_\alpha c_{\alpha i}. \tag{38,5}$$

Avec les équations de liaisons (38,2), elles constituent un système d'équations complet pour les inconnues q_i et λ_α.

Dans la méthode que nous venons d'exposer, les forces de réaction ne figurent généralement pas ; le contact des corps est représenté globalement par les équations de liaisons. Il existe cependant, pour établir les équations du mouvement de corps en contact, une autre méthode qui fait intervenir explicitement les forces de réaction.

---

[1] Notons que pour le roulement d'un cylindre une telle liaison serait holonome. Dans ce cas, l'axe de rotation conserve une direction constante, et par suite $\Omega = d\varphi/dt$ est une dérivée totale de l'angle φ de rotation du cylindre autour de son axe. La relation (38,3) est alors intégrable et donne la liaison entre la coordonnée du centre d'inertie et l'angle φ.

Cette méthode (qui constitue le *principe de d'Alembert*) consiste essentiellement à écrire pour chacun des corps en contact les équations

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt}=\sum \mathbf{f}, \quad \frac{d\mathbf{M}}{dt}=\sum \mathbf{r}\times\mathbf{f}, \tag{38,6}$$

les forces de réaction étant comprises dans l'ensemble des forces **f** qui agissent sur le corps ; ces forces sont inconnues *a priori* et seront déterminées en même temps que le mouvement du corps après résolution des équations. Cette méthode est applicable aussi bien pour des liaisons holonomes que non holonomes.

Problèmes

1. En utilisant le principe de d'Alembert, trouver les équations du mouvement d'une sphère homogène roulant sur un plan sous l'action d'une force extérieure **F** et d'un moment de force **K**.

Solution. L'équation de liaison (38,3) est donnée dans le texte. Faisant intervenir la force de réaction (notons-la **R**) appliquée au point de contact de la sphère et du plan, écrivons les équations (38,6) :

$$\mu\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\mathbf{F}+\mathbf{R}, \tag{1}$$

$$I\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt}=\mathbf{K}-a(\mathbf{n}\times\mathbf{R}) \tag{2}$$

(compte tenu ici que $\mathbf{P}=\mu\mathbf{V}$ et que pour une toupie sphérique $\mathbf{M}=I\mathbf{\Omega}$). En dérivant l'équation de liaison (38,3) par rapport au temps, nous obtenons :

$$\dot{\mathbf{V}}=a(\dot{\mathbf{\Omega}}\times\mathbf{n}).$$

Portant cette valeur dans l'équation (1) et éliminant $\dot{\mathbf{\Omega}}$ à l'aide de (2), on trouve :

$$\frac{I}{a\mu}(\mathbf{F}+\mathbf{R})=\mathbf{K}\times\mathbf{n}-a\mathbf{R}+a\mathbf{n}(\mathbf{nR}),$$

équation qui relie la force de réaction à **F** et **K**. En écrivant cette équation à l'aide des composantes et en y substituant $I=\frac{2}{5}\mu a^2$ (voir problème 2, *b*, § 32), on aura

$$R_x=\frac{5}{7a}K_y-\frac{2}{7}F_x, \quad R_y=-\frac{5}{7a}K_x-\frac{2}{7}F_y, \quad R_z=-F_z$$

(où on a choisi pour plan x, y le plan du roulement). Enfin, en portant ces expressions dans (1), nous obtenons les équations du mouvement ne contenant plus que la force extérieure et le moment donnés :

$$\frac{dV_x}{dt}=\frac{5}{7\mu}\left(F_x+\frac{K_y}{a}\right),$$

$$\frac{dV_y}{dt}=\frac{5}{7\mu}\left(F_y-\frac{K_x}{a}\right).$$

Les composantes Ω_x et Ω_y de la vitesse angulaire s'expriment en fonction de V_x et V_y à l'aide de l'équation de liaison (38,3), et pour Ω_z, on a :

$$\frac{2}{5}\mu a^2 \frac{d\Omega_z}{dt} = K_z$$

(composante sur z de l'équation (2)).

2. Une tige homogène BD de poids P et de longueur l est appuyée sur un mur (fig. 52) ; son extrémité inférieure B est maintenue par un fil AB. Calculer la réaction des supports et la tension du fil.

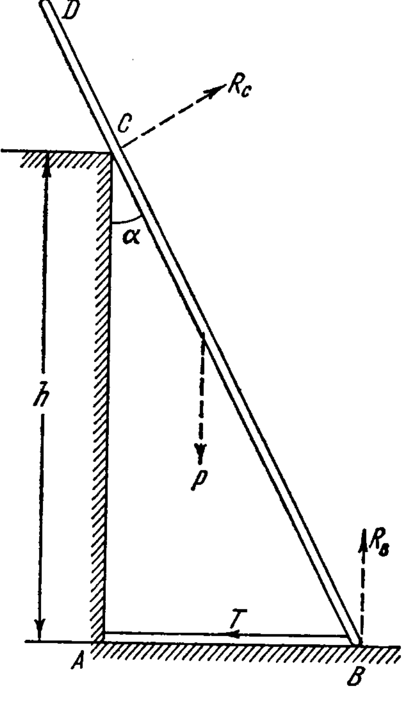


Fig. 52

Solution. Le poids de la tige est représenté par une force P appliquée en son milieu et dirigée verticalement vers le bas. Les forces de réaction R_B et R_C sont dirigées respectivement verticalement vers le haut et perpendiculairement à la tige ; la tension T du fil est dirigée de B vers A. La résolution des équations d'équilibre donne

$$R_C = \frac{Pl}{4h}\sin 2\alpha, \quad R_B = P - R_C \sin\alpha,$$
$$T = R_C \cos\alpha.$$

3. Une tige AB de poids P s'appuie par ses extrémités sur un plan horizontal et sur un plan vertical et est maintenue dans cette position par deux fils horizontaux AD et BC (fig. 53) ; le fil BC se trouve dans un même plan (vertical) que la tige AB. Déterminer les réactions des supports et les tensions des fils.

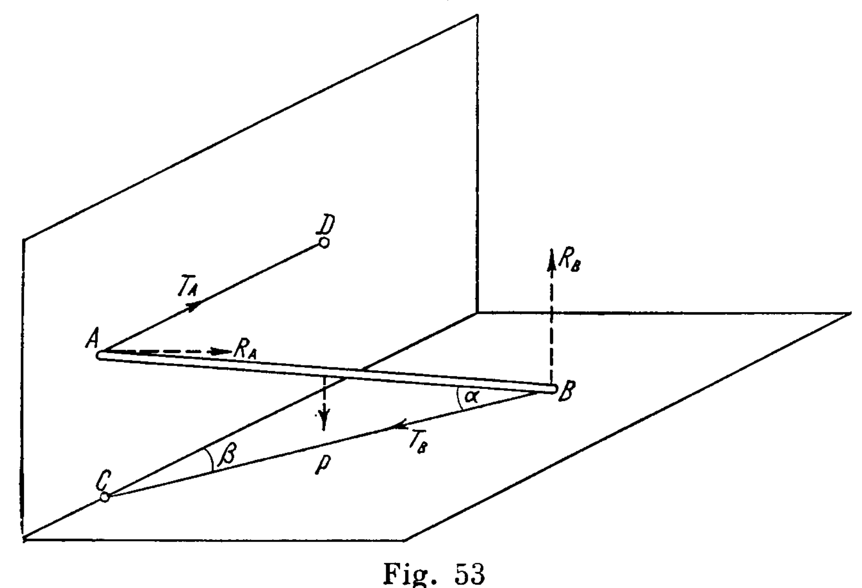


Fig. 53

Solution. Les tensions des fils T_A et T_B sont dirigées de A vers D et de B vers C. Les réactions R_A et R_B sont perpendiculaires aux plans correspondants. La résolution des équations d'équilibre donne

$$R_B = P, \quad T_B = \frac{P}{2}\operatorname{ctg}\alpha, \quad R_A = T_B \sin\beta, \quad T_A = T_B \cos\beta.$$

4. Deux tiges de longueur l sont réunies en haut par une charnière et attachées en bas par un fil AB (fig. 54). Au milieu de l'une des tiges est appliquée une force F (on néglige le poids des tiges). Calculer les forces de réaction.

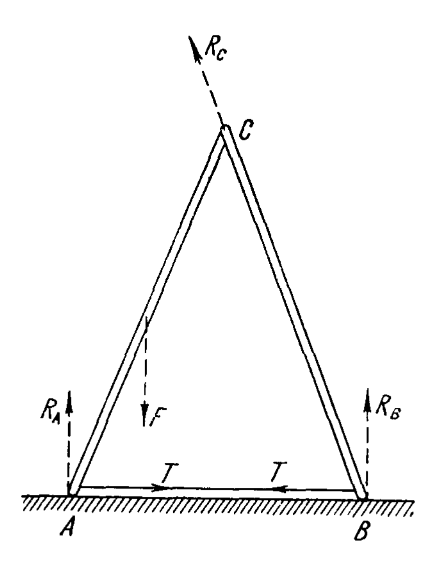


Fig. 54

Solution. La tension T du fil agit au point A de A vers B et au point B de B vers A. Les reactions R_A et R_B aux points A et B sont perpendiculaires au plan du support. Désignons par $\mathbf{R}_C$ la force de réaction agissant à la charnière sur la tige AC. Sur la tige BC agit alors une force de réaction $-\mathbf{R}_C$. La condition que la somme des moments des forces $\mathbf{R}_B$, T et $-\mathbf{R}_C$ agissant sur la tige BC soit nulle, impose que le vecteur $\mathbf{R}_C$ soit dirigé suivant BC. Les autres conditions d'équilibre (pour chacune des deux tiges) conduisent aux valeurs

$$R_A=\frac{3}{4}F,\quad R_B=\frac{F}{4},\quad R_C=\frac{F}{4\sin\alpha},\quad T=\frac{1}{4}F\operatorname{ctg}\alpha,$$

où α est l'angle CAB.

§ 39. Mouvement dans un système de référence non galiléen

Jusqu'à présent, en considérant le mouvement d'un système mécanique quelconque, nous l'avons toujours rapporté à un système de référence galiléen. C'est seulement dans un tel système que la fonction de Lagrange, par exemple, d'une particule dans un champ extérieur peut s'écrire :

$$L_0=\frac{m\mathbf{v}_0^2}{2}-U, \tag{39,1}$$

et qu'on aura pour équation du mouvement

$$m\frac{d\mathbf{v}_0}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$$

(nous désignerons dans ce paragraphe par l'indice 0 les grandeurs rapportées à un système galiléen).

Voyons maintenant quelle forme prendront les équations du mouvement d'une particule dans un système non galiléen. Notre point de départ pour résoudre ce problème sera de nouveau le principe de moindre action dont l'application n'est en aucune façon limitée par le choix du système de référence ; en plus de ce principe, les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}=\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \tag{39,2}$$

restent également valables. Cependant, la fonction de Lagrange n'a plus la forme (39,1) et pour la calculer il est nécessaire de soumettre la fonction L_0 à une transformation appropriée.

Nous effectuerons cette transformation en deux étapes. Considérons d'abord un système de référence K', animé d'un mouvement de translation avec une vitesse $\mathbf{V}\,(t)$ par rapport à un système galiléen K_0. Les vitesses $\mathbf{v}_0$ et $\mathbf{v}'$ d'une particule relativement aux systèmes K_0 et K', sont liées par la relation

$$\mathbf{v}_0=\mathbf{v}'+\mathbf{V}\,(t). \tag{39,3}$$

Portée dans (39,1), cette expression donne la fonction de Lagrange dans le système K' :

$$L'=\frac{m\mathbf{v}'^2}{2}+m\mathbf{v}'\mathbf{V}+\frac{m}{2}\mathbf{V}^2-U.$$

Mais $V^2\,(t)$ est une fonction donnée du temps. Elle peut être représentée comme la dérivée totale par rapport à t d'une autre fonction, et par suite, on peut omettre le troisième terme de l'expression ci-dessus. D'autre part, $\mathbf{v}'=d\mathbf{r}'/dt$, où $\mathbf{r}'$ est le rayon vecteur de la particule dans le système de coordonnées K' ; par conséquent,

$$m\mathbf{V}\,(t)\,\mathbf{v}'=m\mathbf{V}\frac{d\mathbf{r}'}{dt}=\frac{d}{dt}(m\mathbf{V}\mathbf{r}')-m\mathbf{r}'\frac{d\mathbf{V}}{dt}.$$

En portant cette valeur dans la fonction de Lagrange et en omettant de nouveau la dérivée totale par rapport au temps, nous obtenons finalement :

$$L'=\frac{mv'^2}{2}-m\mathbf{W}\,(t)\,\mathbf{r}'-U, \tag{39,4}$$

où $\mathbf{W}=d\mathbf{V}/dt$ est l'accélération du mouvement de translation du système K'.

Etablissons à l'aide de (39,4) l'équation de Lagrange ; il vient

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'}-m\mathbf{W}\,(t). \tag{39,5}$$

On voit donc qu'au point de vue de son influence sur l'équation du mouvement de la particule, le mouvement de translation accé-

léré du système de référence est équivalent à l'apparition d'un champ de force homogène, la force qui agit dans ce champ étant égale au produit de la masse de la particule par l'accélération **W** et dirigée dans le sens contraire de cette accélération.

Introduisons maintenant un autre système de référence K, de même origine que le système K' mais tournant par rapport à celui-ci avec une vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}\,(t)$; par rapport au système galiléen K_0, le système K effectue donc à la fois une translation et une rotation.

La vitesse $\mathbf{v}'$ de la particule relative au système K' se compose de sa vitesse $\mathbf{v}$ relative au système K et de la vitesse $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$ du mouvement de rotation qu'elle effectue en même temps que le système K

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$$

(les rayons vecteurs $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ de la particule dans les systèmes K et K' coïncident). Portant cette expression dans la fonction de Lagrange (39,4), nous obtenons:

$$L = \frac{mv^2}{2} + m\mathbf{v}\,(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{m}{2}\,(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - m\mathbf{W}\mathbf{r} - U. \tag{39,6}$$

Telle est la forme générale de la fonction de Lagrange dans un système de référence quelconque, non galiléen. Notons que la rotation du système de référence fait apparaître dans la fonction de Lagrange un terme tout à fait spécial, linéaire par rapport à la vitesse de la particule.

Pour calculer les dérivées qui entrent dans l'équation de Lagrange, écrivons la différentielle totale:

$$\begin{aligned} dL &= m\mathbf{v}\,d\mathbf{v} + m\,d\mathbf{v}\,(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) + m\mathbf{v}\,(\mathbf{\Omega} \times d\mathbf{r}) + \\ &+ m\,(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})\,(\mathbf{\Omega} \times d\mathbf{r}) - m\mathbf{W}\,d\mathbf{r} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\,d\mathbf{r} = \\ &= m\mathbf{v}\,d\mathbf{v} + m\,d\mathbf{v}\,(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) + m\,d\mathbf{r}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{\Omega}) + \\ &+ m\,[(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{\Omega}]\,d\mathbf{r} - m\mathbf{W}\,d\mathbf{r} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\,d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

En réunissant les termes qui contiennent $d\mathbf{v}$ et $d\mathbf{r}$, on obtient :

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + m\,(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = m\,(\mathbf{v} \times \mathbf{\Omega}) + m\,(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{\Omega} - m\mathbf{W} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}.$$

Portées dans (39,2), ces expressions nous donnent l'équation du mouvement cherchée:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} - m\mathbf{W} + m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{\Omega}} + 2m\mathbf{v} \times \mathbf{\Omega} + m\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{\Omega}). \tag{39,7}$$

On voit que les « forces d'inertie » dues à la rotation du système de référence se composent de trois parties. La force $m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{\Omega}}$ est liée à la non-uniformité de la rotation, et les deux autres existent même si la rotation est uniforme. La force $2m\mathbf{v} \times \mathbf{\Omega}$ est appelée *force de Coriolis*; à la différence de toutes les forces (non dissipatives) que nous avons considérées avant, elle dépend de la vitesse de la particule. La force $m\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{\Omega})$ est dite *centrifuge*. Elle est dirigée dans le plan passant par $\mathbf{r}$ et $\mathbf{\Omega}$ perpendiculairement à l'axe de rotation (c'est-à-dire à la direction de $\mathbf{\Omega}$) et en s'éloignant de l'axe; elle a pour valeur absolue $m\rho\Omega^2$ où ρ est la distance de la particule à l'axe de rotation.

Considérons spécialement le cas d'un système de coordonnées animé d'une rotation uniforme, sans accélération du mouvement de translation. Posant dans (39,6) et (39,7) $\mathbf{\Omega}$ = Cte, $\mathbf{W} = 0$, nous obtenons la fonction de Lagrange

$$L = \frac{mv^2}{2} + m\mathbf{v}(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{m}{2}(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - U \tag{39,8}$$

et l'équation du mouvement

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{d\mathbf{r}} + 2m(\mathbf{v} \times \mathbf{\Omega}) + m\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{\Omega}). \tag{39,9}$$

Calculons également ici l'énergie de la particule. Portant

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + m\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \tag{39,10}$$

dans $E = \mathbf{pv} - L$, on obtient :

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2}(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})^2 + U. \tag{39,11}$$

Remarquons que dans l'expression de l'énergie il n'y a pas de terme linéaire par rapport à la vitesse. L'influence de la rotation du système de référence se réduit à l'addition d'un terme dépendant seulement des coordonnées de la particule et proportionnel au carré de la vitesse angulaire. Cette énergie potentielle supplémentaire $-\frac{m}{2}(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})^2$ est dite *centrifuge*.

La vitesse $\mathbf{v}$ de la particule par rapport au système de référence tournant uniformément est liée à sa vitesse par rapport au système galiléen K_0 par

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}. \tag{39,12}$$

Par suite, l'impulsion $\mathbf{p}$ (39,10) de la particule dans le système K coïncide avec son impulsion $\mathbf{p}_0 = m\mathbf{v}_0$ dans le système K_0. Il en est de même pour les moments cinétiques $\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_0$ et $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Mais les énergies de la particule dans les systèmes K et

K_0 sont différentes. Portant **v** de (39,12) dans (39,11), nous obtenons:

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - m\mathbf{v}_0(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}) + U = \frac{mv_0^2}{2} + U - m(\mathbf{r}\times\mathbf{v}_0)\,\mathbf{\Omega}.$$

Les deux premiers termes représentent l'énergie E_0 dans le système K_0. Introduisant dans le dernier terme le moment cinétique, nous obtenons:

$$E = E_0 - \mathbf{M\Omega}. \qquad (39,13)$$

Cette formule définit la loi de transformation de l'énergie lorsqu'on passe à un système de coordonnées animé d'une rotation uniforme. Bien que nous l'ayons établie pour une seule particule, il est évident que le raisonnement peut être immédiatement généralisé à un système quelconque de particules et conduit à la même formule (39,13).

Problèmes

1. Soit un corps tombant en chute libre. Trouver l'écart par rapport à la verticale provoqué par la rotation de la Terre (la vitesse angulaire de rotation sera considéreé comme petite).

Solution. Dans le champ de pesanteur $U = -m\,\mathbf{gr}$, où **g** est le vecteur accélération de la pesanteur ; en négligeant dans l'équation (39,9) la force centrifuge qui renferme le carré de $\mathbf{\Omega}$, nous obtenons l'équation du mouvement sous la forme

$$\dot{\mathbf{v}} = 2\mathbf{v}\times\mathbf{\Omega} + \mathbf{g}. \qquad (1)$$

Résolvons cette équation par approximations successives. Posons pour cela $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ où $\mathbf{v}_1$ est la solution de l'équation $\dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{g}$, c'est-à-dire $\mathbf{v}_1 = \mathbf{g}t + \mathbf{v}_0$ ($\mathbf{v}_0$ vitesse initiale). Portant $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ dans (1) et ne gardant à droite que $\mathbf{v}_1$, nous obtenons pour $\mathbf{v}_2$ l'équation

$$\dot{\mathbf{v}}_2 = 2\mathbf{v}_1\times\mathbf{\Omega} = 2t\mathbf{g}\times\mathbf{\Omega} + 2\mathbf{v}_0\times\mathbf{\Omega}.$$

L'intégration donne

$$\mathbf{r} = \mathbf{h} + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{g}t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\mathbf{g}\times\mathbf{\Omega} + t^2\mathbf{v}_0\times\mathbf{\Omega}, \qquad (2)$$

où **h** est le vecteur de la position initiale de la particule.

Orientons l'axe z verticalement vers le haut et l'axe x suivant le méridien vers le pôle ; on a alors

$$g_x = g_y = 0,\ g_z = -g\ ;\ \Omega_x = \Omega\cos\lambda,\ \Omega_y = 0,\ \Omega_z = \Omega\sin\lambda,$$

où λ est la latitude (disons nord pour fixer les idées). Posant dans (2) $\mathbf{v}_0 = 0$, il vient

$$x = 0,\ y = -\frac{t^3}{3}\,g\Omega\cos\lambda.$$

En y substituant le temps de chute $t \simeq \sqrt{2h/g}$, nous trouvons finalement

$$x = 0,\ x = -\frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} g\Omega\cos\lambda$$

(le signe moins pour y correspond à un déplacement vers l'est).

2. Déterminer l'écart du plan pour un corps lancé de la surface de la Terre avec une vitesse initiale $\mathbf{v}_0$.

Solution. Choisissons le plan xz tel qu'il contienne la vitesse $\mathbf{v}_0$. Hauteur initiale $\mathbf{h}=0$. Pour l'écart latéral, l'équation (2) du problème 1 donne

$$y=-\frac{t^3}{3}g\Omega_x+t^2(\Omega_x v_{0z}-\Omega_z v_{0x}),$$

soit, en substituant la durée du trajet $t\simeq 2v_{0z}/g$:

$$y=\frac{4v_{0z}^2}{g^2}\left(\frac{1}{3}v_{0z}\Omega_x-v_{0x}\Omega_z\right).$$

3. Déterminer l'influence de la rotation de la Terre sur les petites oscillations d'un pendule (*pendule de Foucault*).

Solution. Négligeant le déplacement vertical du pendule comme infiniment petit du second ordre, on peut considérer que le mouvement s'effectue dans le plan horizontal xy. Omettons les termes qui contiennent Ω^2, et écrivons les équations du mouvement sous la forme

$$\ddot{x}+\omega^2x=2\Omega_z\dot{y},\quad \ddot{y}+\omega^2y=-2\Omega_z\dot{x},$$

où ω est la fréquence des oscillations du pendule comple non tenu de la rotation de la Terre. Multipliant la seconde équation par i et l'ajoutant à la première, nous obtenons l'équation unique

$$\ddot{\xi}+2i\Omega_z\dot{\xi}+\omega^2\xi=0$$

pour la quantité complexe $\xi=x+iy$. Pour $\Omega_z\ll\omega$ la solution de cette équation est de la forme

$$\xi=e^{-i\Omega_z t}(A_1e^{i\omega t}+A_2e^{-i\omega t})$$

ou

$$x+iy=e^{-i\Omega_z t}(x_0+iy_0),$$

où les fonctions $x_0(t)$ et $y_0(t)$ donnent la trajectoire du pendule compte non tenu de la rotation de la Terre. L'influence de cette rotation se ramène par conséquent à un pivotement de la trajectoire autour de la verticale avec une vitesse angulaire Ω_z.

ÉQUATIONS CANONIQUES

§ 40. Equations de Hamilton

La formulation des lois de la Mécanique à l'aide de la fonction de Lagrange (et des équations de Lagrange que l'on en déduit) suppose que l'on se donne, pour décrire l'état mécanique d'un système, les coordonnées et les vitesses généralisées de celui-ci. Cette méthode n'est cependant pas la seule possible. La description de l'état du système à l'aide de ses coordonnées et des impulsions généralisées présente un certain nombre d'avantages, notamment pour l'étude de divers problèmes généraux de Mécanique. Mais on doit alors chercher les équations du mouvement correspondant à cette méthode.

On peut passer d'un choix de variables indépendantes à un autre à l'aide de la transformation connue en mathématiques sous le nom de transformation de Legendre. Dans le cas donné cette transformation prend la forme suivante.

La différentielle totale de la fonction de Lagrange des coordonnées et des vitesses est

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i.$$

On peut écrire cette expression sous la forme

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i, \tag{40,1}$$

puisque les dérivées $\partial L/\partial \dot{q}_i$ sont, par définition, les impulsions généralisées et que les équations de Lagrange donnent $\partial L/\partial q_i = \dot{p}_i$.

Ecrivant maintenant le second terme de (40,1) sous la forme

$$\sum p_i d\dot{q}_i = d\left(\sum p_i \dot{q}_i\right) - \sum \dot{q}_i dp_i,$$

puis transportant la différentielle totale $d\left(\sum p_i\dot{q}_i\right)$ dans le premier membre et changeant les signes, nous tirons de (40,1):

$$d\left(\sum p_i\dot{q}_i - L\right) = -\sum \dot{p}_i\, dq_i + \sum \dot{q}_i\, dp_i.$$

La quantité sous le signe différentiel représente l'énergie du système (voir § 6); exprimée en fonction des coordonnées et des impulsions, elle est appelée *fonction de Hamilton* du système

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i\dot{q}_i - L. \tag{40,2}$$

De l'égalité

$$dH = -\sum \dot{p}_i\, dq_i + \sum \dot{q}_i\, dp_i, \tag{40,3}$$

dans laquelle les variables indépendantes sont les coordonnées et les impulsions, on tire les équations

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{40,4}$$

Ce sont les équations du mouvement cherchées: elles ont pour variables p et q, et on les appelle *équations de Hamilton.* Elles constituent un système de $2s$ équations différentielles du premier ordre à $2s$ fonctions inconnues $p(t)$ et $q(t)$, qui remplacent les s équations du second ordre obtenues par la méthode de Lagrange. A cause de leur simplicité formelle et de leur symétrie, ces équations sont dites aussi *canoniques.*

La dérivée totale par rapport au temps de la fonction de Hamilton est

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i.$$

En y portant $\dot{q}_i$ et $\dot{p}_i$ tirés des équations (40,4), les deux derniers termes s'annulent mutuellement, de sorte que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{40,5}$$

En particulier, si la fonction de Hamilton ne dépend pas explicitement du temps, on a $dH/dt = 0$, c'est-à-dire qu'on retrouve la loi de conservation de l'énergie.

A côté des variables dynamiques q, $\dot{q}$ ou q, p, les fonctions de Lagrange et de Hamilton contiennent des paramètres différents: ce sont des grandeurs qui caractérisent les propriétés du système mécanique lui-même ou du champ extérieur qui agit sur lui. Soit λ l'un de ces paramètres. Si nous le considérons comme variable, nous aurons au lieu de (40,1):

$$dL = \sum \dot{p}_i\, dq_i + \sum p_i\, d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \lambda}\, d\lambda,$$

et au lieu de (40,3), nous obtiendrons :

$$dH = -\sum \dot{p}_i\, dq_i + \sum \dot{q}_i\, dp_i - \frac{\partial L}{\partial \lambda}\, d\lambda.$$

D'où la relation

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{p,\, q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{\dot{q},\, q}, \tag{40,6}$$

entre les dérivées partielles des fonctions de Lagrange et de Hamilton par rapport au paramètre λ ; les indices dont sont affectées ces dérivées signifient que la dérivation doit être effectuée dans un cas à p et q constants, et dans l'autre à q et $\dot{q}$ constants.

Ce résultat peut être présenté sous une autre forme. Soit $L = L_0 + L'$ la fonction de Lagrange, où L' est une quantité petite ajoutée à la fonction fondamentale L_0. La quantité correspondante que l'on doit ajouter à la fonction de Hamilton $H = H_0 + H'$ est alors liée à L' par

$$(H')_{p,\, q} = -(L')_{\dot{q},\, q}. \tag{40,7}$$

Notons que dans la transformation (40,1) à (40,3), nous n'avons pas écrit le terme en dt qui tiendrait compte de la dépendance explicite possible de la fonction de Lagrange par rapport au temps ; en effet, dans la forme considérée, ce terme jouerait simplement le rôle d'un paramètre sans rapport avec la transformation effectuée. Les dérivées partielles par rapport au temps de L et de H sont liées par la relation

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{p,\, q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{\dot{q},\, q} \tag{40,8}$$

analogue à la formule (40,6).

Problèmes

1. Trouver la fonction de Hamilton d'un point matériel, en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

Réponse : en coordonnées cartésiennes x, y, z :

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z).$$

En coordonnées cylindriques r, φ, z :

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2\right) + U(r, \varphi, z).$$

En coordonnées sphériques r, θ, φ :

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + U(r, \theta, \varphi).$$

2. Trouver la fonction de Hamilton d'une particule dans un système de référence animé d'un mouvement de rotation uniforme.

Solution. En exprimant dans l'énergie (39,11) la vitesse $\mathbf{v}$ en fonction de l'impulsion $\mathbf{p}$ d'après (39,10), on obtient :

$$H=\frac{p^2}{2m}-\mathbf{\Omega}\,(\mathbf{r}\times\mathbf{p})+U.$$

3. Trouver la fonction de Hamilton d'un système constitué par une particule de masse M et de n particules de masses m, le mouvement étant rapporté au référentiel du centre d'inertie (cf. prob., § 13).

Solution. L'énergie E se déduit de la fonction de Lagrange trouvée dans le problème du § 13 en changeant le signe devant U. On a les impulsions généralisées :

$$\mathbf{p}_a=\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}=m\mathbf{v}_a-\frac{m^2}{\mu}\sum_a \mathbf{v}_a.$$

On en déduit :

$$\sum \mathbf{p}_a=m\sum \mathbf{v}_a-\frac{nm^2}{\mu}\sum \mathbf{v}_a=\frac{mM}{\mu}\sum \mathbf{v}_a,$$

$$\mathbf{v}_a=\frac{\mathbf{p}_a}{m}+\frac{1}{M}\sum \mathbf{p}_a.$$

La substitution dans E donne:

$$H=\frac{1}{2m}\sum_a \mathbf{p}_a^2+\frac{1}{2M}\Big(\sum_a \mathbf{p}_a\Big)^2.$$

§ 41. Fonction de Routh

Dans certains cas, lorsqu'on passe aux nouvelles variables, il peut être utile de ne pas remplacer par les impulsions toutes les vitesses généralisées, mais seulement quelques-unes d'entre elles. La transformation correspondante est tout à fait analogue à celle que nous avons effectuée au paragraphe précédent.

Pour simplifier l'écriture, supposons d'abord qu'on n'a que deux coordonnées, q et ξ, et effectuons la transformation qui fait passer des variables q, ξ, $\dot q$, $\dot\xi$ aux variables q, ξ, p, $\dot\xi$, où p est l'impulsion généralisée correspondant à la coordonnée q.

La différentielle de la fonction de Lagrange est

$$dL=\frac{\partial L}{\partial q}\,dq+\frac{\partial L}{\partial \dot q}\,d\dot q+\frac{\partial L}{\partial \xi}\,d\xi+\frac{\partial L}{\partial \dot\xi}\,d\dot\xi=\dot p\,dq+p\,d\dot q+\frac{\partial L}{\partial \xi}\,d\xi+\frac{\partial L}{\partial \dot\xi}\,d\dot\xi,$$

d'où

$$d(L-p\dot q)=\dot p\,dq-\dot q\,dp+\frac{\partial L}{\partial \xi}\,d\xi+\frac{\partial L}{\partial \dot\xi}\,d\dot\xi.$$

Introduisons la fonction appelée *fonction de Routh*

$$R(\dot{q}, p, \xi, \dot{\xi}) = -p\dot{q} - L, \qquad (41,1)$$

qui exprime la vitesse $\dot{q}$ en fonction de l'impulsion p à l'aide de la formule $p = \partial L/\partial \dot{q}$. Par différentiation on a :

$$dR = -\dot{p}\, dq + \dot{q}\, dp - \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi}. \qquad (41,2)$$

D'où il résulte que

$$\dot{q} = \frac{\partial R}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial R}{\partial q}, \qquad (41,3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = -\frac{\partial R}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}. \qquad (41,4)$$

En portant les dernières égalités dans l'équation de Lagrange exprimée en fonction de la coordonnée ξ, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial R}{\partial \xi}. \qquad (41,5)$$

Ainsi, la fonction de Routh est fonction de Hamilton par rapport à la coordonnée q (équations (41,3)) et fonction de Lagrange pour la coordonnée ξ (équation (41,5)).

Conformément à la définition générale, l'énergie du système est

$$E = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{\xi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - L = p\dot{q} + \dot{\xi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - L.$$

On l'exprimera à l'aide de la fonction de Routh en y substituant (41,1) et (41,4)

$$E = R - \dot{\xi} \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}. \qquad (41,6)$$

L'extension des formules obtenues au cas de plusieurs coordonnées q et ξ est immédiate.

L'utilité de la fonction de Routh se révèle en particulier lorsqu'on a des coordonnées cycliques. Si les coordonnées q sont cycliques, elles n'entrent pas explicitement dans la fonction de Lagrange, et par suite non plus dans la fonction de Routh, de sorte que celle-ci sera fonction seulement de p, ξ, $\dot{\xi}$. Mais les impulsions p correspondant aux coordonnées cycliques sont constantes (cela résulte également de la deuxième équation (41,3), qui dans ce sens ne donne

rien de nouveau). Une fois les impulsions p remplacées par leurs valeurs constantes données, les équations (41,5)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R(p, \xi, \dot{\xi})}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial R(p, \xi, \dot{\xi})}{\partial \xi}$$

se réduisent à des équations contenant seulement les coordonnées ξ, de sorte que les coordonnées cycliques disparaissent complètement. Si ces équations sont résolues et les fonctions $\xi(t)$ trouvées, il suffit de les porter dans le second membre des équations

$$\dot{q} = \frac{\partial R(p, \xi, \dot{\xi})}{\partial p}$$

pour trouver par intégration directe les fonctions $q(t)$.

Problème

Trouver la fonction de Routh d'une toupie symétrique dans un champ extérieur $U(\varphi, \theta)$, en éliminant la coordonnée cyclique ψ (ψ, φ, θ angles d'Euler).

Solution. Fonction de Lagrange

$$L = \frac{I_1'}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 - U(\varphi, \theta)$$

(voir problème 1, § 35). Fonction de Routh

$$R = p_\psi \dot{\psi} - L = \frac{p_\psi^2}{2I_3} - p_\psi \dot{\varphi}\cos\theta - \frac{I_1'}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) + U(\varphi, \theta);$$

le premier terme de cette expression est une constante que l'on peut omettre.

§ 42. Crochets de Poisson

Soit $f(p, q, t)$ une fonction des coordonnées, des impulsions et du temps. Ecrivons sa dérivée totale par rapport au temps:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k\right).$$

En remplaçant $\dot{q}_k$ et $\dot{p}_k$ par leurs expressions tirées des équations de Hamilton (40,4), on obtient:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\}, \tag{42,1}$$

où on a introduit la notation

$$\{Hf\} = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right). \tag{42,2}$$

L'expression (42,2) est appelée *crochets de Poisson* pour H et f.

De telles fonctions des variables dynamiques, qui restent constantes pendant le mouvement du système, constituent, comme on le sait, des intégrales premières. On voit d'après (42,1) que la condition pour que f soit intégrale première ($df/dt = 0$), peut s'écrire:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\} = 0. \tag{42,3}$$

Si l'intégrale première ne dépend pas explicitement du temps

$$\{Hf\} = 0, \tag{42,4}$$

c'est-à-dire que ses crochets de Poisson formés avec la fonction de Hamilton doivent s'annuler.

Pour deux grandeurs quelconques f et g les crochets de Poisson se définissent de la même manière que dans (42,2):

$$\{fg\} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right). \tag{42,5}$$

Les crochets de Poisson possèdent les propriétés suivantes qui se déduisent aisément de leur définition.

Si on intervertit les fonctions, les crochets changent de signe; si l'une des fonctions est constante (c), le crochet est nul:

$$\{fg\} = -\{gf\} \tag{42,6}$$

$$\{fc\} = 0. \tag{42,7}$$

Ensuite

$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1 g\} + \{f_2 g\}, \tag{42,8}$$

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2 g\} + f_2 \{f_1 g\}. \tag{42,9}$$

En prenant la dérivée partielle de (42,5) par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \{fg\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}\, g \right\} + \left\{ f\, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}. \tag{42,10}$$

Si l'une des fonctions f ou g coïncide avec une impulsion ou une coordonnée, les crochets de Poisson se réduisent simplement à une dérivée partielle:

$$\{f q_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k}, \tag{42,11}$$

$$\{f p_k\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k}. \tag{42,12}$$

On obtient la formule (42,11), par exemple, en posant dans (42,5) $g = q_k$; toute la somme se réduit alors à un terme, puisque $\frac{\partial q_k}{\partial q_l} =$

$= \delta_{kl}$ et $\frac{\partial q_k}{\partial p_l} = 0$. En posant dans (42,11) et (42,12) la fonction f égale à q_i et p_i, on aura en particulier

$$\{q_i q_k\} = 0, \qquad \{p_i p_k\} = 0, \qquad \{p_i q_k\} = \delta_{ik}. \tag{42,13}$$

Entre les crochets de Poisson formés de trois fonctions il existe la relation

$$\{f\,\{gh\}\} + \{g\,\{hf\}\} + \{h\,\{fg\}\} = 0, \tag{42,14}$$

appelée *identité de Jacobi.*

Pour la démontrer, faisons la remarque suivante. Selon la définition (42,5) les crochets de Poisson $\{fg\}$ sont des fonctions homogènes bilinéaires des dérivées premières de f et g. Par suite, le crochet $\{h\ \{fg\}\}$, par exemple, est une fonction linéaire homogène des dérivées secondes de f et g. Tout le premier membre de l'égalité (42,14) est donc une fonction homogène linéaire des dérivées secondes des trois fonctions f, g, h. Réunissons les termes qui contiennent les dérivées secondes de f. Le premier crochet n'en renferme pas: il ne contient que les dérivées premières de f. Ecrivons la somme des deuxième et troisième crochets sous forme symbolique en utilisant les opérateurs différentiels linéaires D_1 et D_2 donnés par

$$D_1(\varphi) = \{g\varphi\}, \quad D_2(\varphi) = \{h\varphi\}.$$

On a alors

$$\{g\,\{hf\}\} + \{h\,\{fg\}\} = \{g\,\{hf\}\} - \{h\,\{gf\}\} =$$
$$= D_1(D_2(f)) - D_2(D_1(f)) = (D_1D_2 - D_2D_1)\,f.$$

Il est facile de voir cependant qu'une telle combinaison d'opérateurs différentiels linéaires ne peut contenir de dérivées secondes de f. En effet, la forme générale des opérateurs différentiels linéaires est

$$D_1 = \sum_k \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad D_0 = \sum_k \eta_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

où ξ_k et η_k sont des fonctions quelconques des variables x_1, x_2, ... Par suite,

$$D_1D_2 = \sum_{k,\,l} \xi_k \eta_l \frac{\partial^2}{\partial x_k\, \partial x_l} + \sum_{k,\,l} \xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l},$$

$$D_2D_1 = \sum_{k,\,l} \eta_k \xi_l \frac{\partial^2}{\partial x_k\, \partial x_l} + \sum_{k,\,l} \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l},$$

et la différence de ces produits

$$D_1D_2 - D_2D_1 = \sum_{k,\,l} \left(\xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} - \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k}\right) \frac{\partial}{\partial x_l}$$

est de nouveau un opérateur contenant seulement des dérivées premières. Ainsi, dans le premier membre de l'égalité (42,14), tous les termes à dérivées secondes de f s'annulent réciproquement, et puisqu'il en est évidemment de même pour les fonctions g et h, l'expression entière est identiquement nulle.

Une propriété importante des crochets de Poisson consiste en ce que, si f et g sont deux intégrales premières, leurs crochets de Poisson sont aussi une intégrale première

$$\{fg\} = \text{Cte} \tag{42,15}$$

(*théorème de Poisson*).

La démonstration de ce théorème est très simple si f et g ne dépendent pas explicitement du temps. En posant dans l'identité de Jacobi $h = H$, on a :

$$\{H\{fg\}\} + \{f\{gH\}\} + \{g\{Hf\}\} = 0.$$

D'où il est clair que si $\{Hg\} = 0$ et $\{Hf\} = 0$, alors $\{H\ \{gf\}\} = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Si par contre les intégrales premières f et g dépendent explicitement du temps, nous écrirons en partant de (42,1) :

$$\frac{d}{dt}\{fg\} = \frac{\partial}{\partial t}\{fg\} + \{H\{fg\}\}.$$

En utilisant la formule (42,10) et en remplaçant le crochet $\{H\{fg\}\}$ par deux autres d'après l'identité de Jacobi, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}\{fg\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}\, g\right\} + \left\{f\, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} - \{f\,\{g\}H\}\} - \{g\,\{Hf\} =$$

$$= \left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\},\ g\right\} + \left\{f,\ \frac{\partial g}{\partial t} + \{Hg\}\right\}$$

ou

$$\frac{d}{dt}\{fg\} = \left\{\frac{df}{dt}\, g\right\} + \left\{f\, \frac{dg}{dt}\right\}, \tag{42,16}$$

et la démonstration du théorème de Poisson dans le cas général est alors évidente.

Bien entendu, en appliquant le théorème de Poisson, nous n'obtiendrons pas toujours de nouvelles intégrales premières, puisque leur nombre est généralement limité ($2s - 1$, où s est le nombre de degrés de liberté). Dans certains cas, nous pouvons obtenir un résultat trivial : les crochets de Poisson se ramenant à une constante. Dans d'autres cas, la nouvelle intégrale obtenue peut être simplement une fonction des intégrales fondamentales f et g. Si aucun de ces cas ne se présente, les crochets de Poisson donneront une nouvelle intégrale première.

Problèmes

1. Déterminer les crochets de Poisson formés des composantes cartésiennes de l'impulsion **p** et du moment cinétique $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ d'un point matériel.

Solution. A l'aide de la formule (42,12) on trouve

$$\{M_x p_y\} = -\frac{\partial M_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(yp_z - zp_y) = -p_z$$

et de la même façon

$$\{M_x p_x\} = 0, \quad \{M_x p_z\} = p_y.$$

Les autres crochets s'obtiennent de là par permutation circulaire des indices x, y, z.

2. Déterminer les crochets de Poisson formés des composantes de **M**.

Solution. La formule (42,5) donne par un calcul immédiat

$$\{M_x M_y\} = -M_z, \quad \{M_y M_z\} = -M_x, \quad \{M_z M_x\} = -M_y.$$

Puisque les impulsions et les coordonnées de différentes particules sont des variables indépendantes les unes des autres, il est facile de voir que les formules obtenues aux problèmes 1 et 2 sont également valables pour l'impulsion totale et le moment total d'un système de particules quelconque.

3. Montrer que

$$\{\varphi M_z\} = 0,$$

où φ est une fonction scalaire des coordonnées et de l'impulsion d'une particule.

Solution. Une fonction scalaire ne peut dépendre des composantes des vecteurs **r** et **p** que dans les combinaisons $\mathbf{r}^2$, $\mathbf{p}^2$, $\mathbf{rp}$. Par suite,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \varphi}{\partial (\mathbf{r}^2)} 2\mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial (\mathbf{pr})} \mathbf{p}$$

et de même pour $\partial\varphi/\partial\mathbf{p}$. La relation cherchée se vérifie immédiatement d'après la formule (42,5) compte tenu des règles de différentiation indiquées.

4. Montrer que

$$\{\mathbf{f} M_z\} = \mathbf{n} \times \mathbf{f},$$

où **f** est une fonction vectorielle des coordonnées et de l'impulsion d'une particule, et **n** le vecteur unitaire de l'axe z.

Solution. Tout vecteur $\mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ peut être écrit sous la forme $\mathbf{f} = \mathbf{r}\varphi_1 + \mathbf{p}\varphi_2 + (\mathbf{r} \times \mathbf{p})\varphi_3$, où φ_1, φ_2, φ_3 sont des fonctions scalaires. La relation cherchée se vérifie directement à l'aide des formules (42,9), (42,11), (42,12) et de la formule donnée au problème 3.

§ 43. L'action en fonction des coordonnées

En formulant le principe de moindre action, nous avons considéré l'intégrale

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt, \tag{43,1}$$

prise le long de la trajectoire entre deux positions données $q^{(1)}$ et $q^{(2)}$ occupées par le système à deux instants donnés t_1 et t_2. Lors-

qu'on faisait varier l'action, on comparaissait les valeurs de cette intégrale pour des trajectoires voisines ayant les mêmes limites $q(t_1)$ et $q(t_2)$. Une seule de ces trajectoires correspond au mouvement réel : celle pour laquelle l'intégrale S est minimum.

Envisageons maintenant la notion d'action sous un autre aspect. Précisément, nous allons considérer S comme une grandeur caractérisant le mouvement le long de trajectoires réelles, et nous comparerons les valeurs qu'elle prend pour des trajectoires ayant une origine commune $q(t_1) = q^{(1)}$, mais passant à l'instant t_2 par des positions différentes. En d'autres termes, nous considérerons l'intégrale d'action pour des trajectoires réelles comme fonction des valeurs des coordonnées à la limite supérieure d'intégration.

La variation de l'action lorsqu'on passe d'une trajectoire à une trajectoire voisine est donnée (pour un degré de liberté) par l'expression (2,5) :

$$\delta S = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q\right|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q\, dt.$$

Puisque les trajectoires d'un mouvement réel satisfont aux équations de Lagrange, l'intégrale donnée ici s'annule. Dans le premier terme, posons à la limite inférieure $\delta q(t_1) = 0$ et désignons simplement la valeur $\delta q(t_2)$ par δq. En remplaçant également $\partial L/\partial \dot q$ par p, nous obtenons finalement $\delta S = p\delta q$, soit pour un nombre quelconque de degrés de liberté

$$\delta S = \sum_i p_i \delta q_i. \tag{43,2}$$

Cette relation entraîne que les dérivées partielles de l'action par rapport aux coordonnées sont égales aux impulsions correspondantes

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i. \tag{43,3}$$

De façon analogue, on peut envisager l'action comme fonction explicite du temps ; on considère dans ce cas des trajectoires partant à un instant donné t_1 d'une position donnée $q^{(1)}$ pour aboutir à une position donnée $q^{(2)}$ à des instants différents $t_2 = t$. La dérivée $\partial S/\partial t$ ainsi comprise peut être trouvée au moyen d'une variation appropriée de l'intégrale. Le plus simple cependant est d'utiliser la fonction (43,3) en opérant de la façon suivante.

Par définition, la dérivée totale de l'action par rapport au temps le long de la trajectoire est égale à

$$\frac{dS}{dt} = L. \tag{43,4}$$

D'autre part, en considérant S comme une fonction des coordonnées et du temps dans le sens indiqué plus haut et en utilisant la formule (43,3), on aura

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i.$$

En comparant les deux expressions, on trouve

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i$$

soit finalement :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H. \tag{43,5}$$

On peut réunir les formules (43,3) et (43,5) en une expression

$$dS = \sum_i p_i \, dq_i - H \, dt \tag{43,6}$$

qui donne la différentielle totale de l'action comme fonction des coordonnées et du temps à la limite supérieure de l'intégrale (43,1). Supposons maintenant que les coordonnées (et le temps) varient non seulement pour la fin, mais aussi pour le début du mouvement. Il est évident que la variation correspondante de S sera donnée par la différence des expressions (43,6) pour les deux extrémités, c'est-à-dire

$$dS = \sum p_i^{(2)} \, dq_i^{(2)} - H^{(2)} \, dt^{(2)} - \sum p_i^{(1)} \, dq_i^{(1)} + H^{(1)} \, dt^{(1)}. \tag{43,7}$$

Cette relation montre déjà par elle-même que quelle que soit l'action extérieure à laquelle est soumis le système pendant son mouvement, son état final ne peut être une fonction arbitraire de son état initial : seuls sont possibles les mouvements pour lesquels l'expression (43,7) est une différentielle totale exacte. Ainsi, par son existence même, et indépendamment de la forme concrète de la fonction de Lagrange, le principe de moindre action impose à l'ensemble des mouvements possibles des limites bien déterminées. Notamment, il est possible d'établir un ensemble de lois générales (indépendantes de la forme des champs extérieurs) pour des faisceaux de particules se propageant à partir de points donnés de l'espace. L'étude de ces lois fait l'objet de l'*Optique géométrique* [1].

Il n'est pas sans intérêt de noter que les équations de Hamilton peuvent être déduites formellement de la condition de minimum

---

[1] Voir *Théorie du champ*, §§ 53-57.

de l'action, si on représente celle-ci, compte tenu de (43,6), par l'intégrale

$$S = \int \left(\sum_i p_i \, dq_i - H \, dt \right) \qquad (43,8)$$

et si on considère les coordonnées et les impulsions comme des grandeurs que l'on fait varier indépendamment. En supposant de nouveau pour simplifier qu'on n'a qu'une coordonnée (et une impulsion), écrivons la variation de l'action

$$dS = \int \left\{ \delta p \, dp + p d \, \delta q - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q \, dt - \frac{\partial H}{\partial q} \delta p \, dt \right\} .$$

La transformation du second membre (intégration par parties) donne :

$$\delta S = \int \delta p \left(dq - \frac{\partial H}{\partial p} dt \right) + p \delta q - \int \delta q \left(dp + \frac{\partial H}{\partial q} dt \right) .$$

Aux limites d'intégration, nous devons poser $\delta q = 0$, de sorte que le terme tout intégré disparaît. L'expression qui reste ne peut être nulle pour des δp et δq indépendants et arbitraires que si les parenthèses sous chacun des signes somme sont nulles :

$$dq = \frac{\partial H}{\partial p} dt, \qquad dp = -\frac{\partial H}{\partial q} dt,$$

c'est-à-dire qu'après division par dt, nous obtenons les équations de Hamilton.

§ 44. Principe de Maupertuis

Le mouvement d'un système mécanique est complètement déterminé par le principe de moindre action : en résolvant les équations du mouvement qui découlent de ce principe, on peut trouver aussi bien la forme de la trajectoire que la relation entre une position sur cette trajectoire et le temps correspondant.

Si on s'en tient à la question plus restreinte de la détermination de la seule trajectoire (laissant de côté la partie temporelle du problème), il est possible alors de donner au principe de moindre action une forme simplifiée.

Supposons que la fonction de Lagrange, et avec elle la fonction de Hamilton, ne contienne pas le temps explicitement, de sorte que l'énergie du système se conserve

$$H(p, q) = E = \text{Cte}.$$

D'après le principe de moindre action, la variation de l'action pour des valeurs initiales et finales des coordonnées et du temps (disons t_0 et t) données est nulle. Mais si l'on admet la variation

de l'instant final t, les coordonnées initiales et finales étant toujours fixées, on a alors [cf. (43,7)]:

$$\delta S = -H\delta t. \tag{44,1}$$

Nous allons à présent comparer non pas tous les déplacements virtuels du système, mais seuls ceux vérifiant la loi de conservation de l'énergie. Pour de telles trajectoires, nous pouvons remplacer H dans (44,1) par la constante E, ce qui donne:

$$\delta S + E\delta t = 0. \tag{44,2}$$

Ecrivant l'action sous la forme (43,8) et remplaçant de nouveau H par E, il vient

$$S = \int \sum_i p_i \delta q_i - E(t - t_0). \tag{44,3}$$

Le premier terme dans cette expression,

$$S_0 = \int \sum_i p_i \delta q_i, \tag{44,4}$$

est parfois appelé *action réduite*. Substituant (44,3) dans (44,2), on trouve que

$$\delta S_0 = 0. \tag{44,5}$$

De sorte que l'action réduite a un minimum sur l'ensemble de toutes les trajectoires satisfaisant à la loi de conservation de l'énergie et passant par le point final à un instant arbitraire. Pour utiliser ce principe variationnel, il faut au préalable exprimer les impulsions, et avec elles toute l'expression sous le signe somme dans (44,2), en fonction des coordonnées q et de leurs différentielles dq. Il faut partir pour cela des égalités

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L\left(q, \frac{dq}{dt}\right), \tag{44,6}$$

qui définissent les impulsions, et de l'équation

$$E\left(q, \frac{dq}{dt}\right) = E, \tag{44,7}$$

qui exprime la loi de conservation de l'énergie. Tirant de cette dernière la différentielle dt en fonction des coordonnées q et de leurs différentielles dq d'après (44,7) et portant dans les formules (44,6), nous exprimons les impulsions en fonction de q et dq, et l'énergie E jouera alors le rôle d'un paramètre. Le principe variationnel ainsi obtenu détermine la trajectoire du système; on l'appelle habituellement *principe de Maupertuis* (bien que sa formulation exacte ait été donnée par Euler et Lagrange).

Explicitons les opérations sous la forme habituelle de la fonction de Lagrange (5,5) comme différence des énergies cinétique et potentielle :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q).$$

Les impulsions sont alors

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k a_{ik}(q) \dot{q}_k,$$

et l'énergie

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k + U(q).$$

De la dernière égalité on tire

$$dt = \sqrt{\frac{\sum a_{ik}\, dq_i\, dq_k}{2(E-U)}} \tag{44,8}$$

et portant cette expression dans

$$\sum_i p_i\, dq_i = \sum_{i,k} a_{ik} \frac{dq_k}{dt} dq_i,$$

nous obtenons l'action raccourcie sous la forme

$$S_0 = \int \sqrt{2(E-U) \sum_{i,k} a_{ik}\, dq_i\, dp_k}. \tag{44,9}$$

En particulier pour un point matériel l'énergie cinétique est

$$T = \frac{m}{2} \left(\frac{dl}{dt}\right)^2$$

(où m est la masse de la particule et dl l'élément de longueur de la trajectoire), et le principe variationnel pour déterminer la forme de la trajectoire :

$$\delta \int \sqrt{2m(E-U)}\, dl = 0, \tag{44,10}$$

où l'intégrale est prise entre deux points donnés de l'espace (Jacobi).

Pour le mouvement libre d'une particule $U=0$, et (44,10) donne alors le résultat trivial :

$$\delta \int dl = 0,$$

c'est-à-dire que la particule suit le plus court chemin : une droite.

Revenons à l'expression (44,3) de l'action et donnons-lui cette fois une variation par rapport au paramètre E:

$$\delta S = \frac{\partial S_0}{\partial E}\,\delta E - (t - t_0)\,\delta E - E\delta t.$$

Substituant dans (44,3), il vient:

$$\frac{\partial S_0}{\partial E} = t - t_0. \tag{44,11}$$

Pour l'action réduite sous sa forme (44,9), cette égalité conduit à la relation

$$\int \sqrt{\frac{\sum a_{ik}\,dq_i\,dq_k}{2(E-U)}} = t - t_0, \tag{44,12}$$

qui n'est autre que l'intégrale de l'équation (44,8). Avec l'équation de la trajectoire elle détermine complètement le mouvement.

Problème

En partant du principe variationnel (44, 7), trouver l'équation différentielle de la trajectoire.

Solution. En effectuant la variation, on a :

$$\delta \int \sqrt{E-U}\,dt = -\int \left\{ \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \frac{\delta \mathbf{r}}{2\sqrt{E-U}}\,dl - \sqrt{E-U}\,\frac{d\mathbf{r}}{dl}\,d\delta\mathbf{r} \right\}.$$

Dans le second terme on a tenu compte du fait que $dl^2 = d\mathbf{r}^2$ et que par suite $dl\,d\delta l = d\mathbf{r}\,d\delta\mathbf{r}$; en intégrant par parties ce second terme et en égalant ensuite à zéro le coefficient de $\delta\mathbf{r}$ dans l'expression sous le signe somme, nous obtenons l'équation différentielle de la trajectoire

$$2\sqrt{E-U}\,\frac{d}{dl}\left(\sqrt{E-U}\,\frac{d\mathbf{r}}{dl}\right) = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}.$$

En effectuant la dérivation dans le premier membre de cette égalité et introduisant la force $\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$ on peut écrire cette équation sous la forme

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} = \frac{\mathbf{F} - (\mathbf{F}\mathbf{t})\,\mathbf{t}}{2(E-U)},$$

où $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/dl$ est le vecteur unitaire de la tangente à la trajectoire. La différence $\mathbf{F} - (\mathbf{F}\mathbf{t})\mathbf{t}$ est la composante $\mathbf{F}_n$ normale à la trajectoire de la force. La dérivée $d^2\mathbf{r}/dl^2 = d\mathbf{t}/dl$ est égale, comme on le sait d'après la géométrie différentielle, à $\mathbf{n}/R$, où R est le rayon de courbure de la trajectoire, et $\mathbf{n}$ le vecteur unitaire de la normale principale. Remplaçant également $E - U$ par $mv^2/2$, on obtient:

$$\mathbf{n}\,\frac{mv^2}{R} = \mathbf{F}_n$$

conformément à l'expression connue de l'accélération normale dans un mouvement le long d'une trajectoire courbe.

§ 45. Transformations canoniques

Le choix des coordonnées généralisées q n'est limité par aucune condition: on peut prendre s grandeurs quelconques définissant de façon univoque la position du système dans l'espace. L'aspect formel des équations de Lagrange (2,6) ne dépend pas de ce choix, et dans ce sens on peut dire que les équations de Lagrange sont invariantes par rapport à la transformation qui fait passer des coordonnées $q_1, q_2, \ldots$ à d'autres grandeurs indépendantes $Q_1, Q_2, \ldots$ Les nouvelles coordonnées Q sont fonctions des anciennes q; admettons alors que nous les ayons choisies de telle sorte que cette relation contienne également le temps de façon explicite, c'est-à-dire qu'on aura des transformations du type

$$Q_i = Q_i(q, t) \tag{45,1}$$

(appelées quelquefois *transformations ponctuelles*).

Outre les équations de Lagrange, la transformation (45,1) laisse évidemment invariante la forme (40,4) des équations de Hamilton. Ces dernières cependant admettent en réalité une classe beaucoup plus large de transformations. Cette circonstance découle naturellement du fait que dans la méthode de Hamilton, les impulsions p jouent le rôle de variables indépendantes au même titre que les coordonnées q. C'est pourquoi la notion de transformation peut être élargie de façon à englober la transformation des $2s$ variables indépendantes p et q en les nouvelles variables P et Q suivant les formules

$$Q_i = Q_i(p, q, t), \quad P_i = P_i(p, q, t). \tag{45,2}$$

Cet élargissement de la classe des transformations admissibles constitue un des avantages essentiels de la méthode de Hamilton en Mécanique.

Il serait tout à fait faux cependant d'en déduire que les équations du mouvement conservent leur forme canonique pour toute transformation du type (45,2). Dégageons maintenant les conditions auxquelles doit obéir une transformation pour que les équations du mouvement dans les nouvelles variables P et Q aient la forme

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} \tag{45,3}$$

avec une nouvelle fonction de Hamilton $H'(P, Q)$. De telles transformations sont dites *canoniques*.

On peut aboutir aux formules de transformations canoniques de la manière suivante. A la fin du § 43, nous avons montré que les équations de Hamilton peuvent être obtenues à partir du prin-

cipe de moindre action mis sous la forme

$$\delta \int \Big(\sum_i p_i \, dq_i - H \, dt \Big) = 0 \tag{45,4}$$

(toutes les coordonnées et les impulsions variant indépendamment). Pour que les nouvelles variables P et Q satisfassent aussi aux équations de Hamilton, elles doivent vérifier également le principe de moindre action :

$$\delta \int \Big(\sum_i P_i \, dQ_i - H' \, dt \Big) = 0. \tag{45,5}$$

Mais les deux principes (45,4) et (45,5) ne sont équivalents qu'à la condition que les expressions sous le signe somme diffèrent seulement par la différentielle totale d'une fonction arbitraire F des coordonnées, des impulsions et du temps ; la différence entre les deux intégrales (différence des valeurs de F aux limites d'intégration) sera alors une constante dont la variation sera nulle. On doit par conséquent avoir :

$$\sum p_i \, dq_i - H \, dt = \sum P_i \, dQ_i - H' \, dt + dF.$$

Toute transformation canonique est caractérisée par sa fonction F qu'on appele *fonction génératrice de la transformation*.

Ecrivant la relation obtenue sous la forme

$$dF = \sum p_i \, dq_i - \sum P_i \, dQ_i + (H' - H) \, dt, \tag{45,6}$$

on voit que

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \qquad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}, \tag{45,7}$$

la fonction génératrice étant supposée donnée comme fonction des anciennes et des nouvelles coordonnées (et du temps) : $F = F(q, Q, t)$. Pour une fonction F donnée, les formules (45,7) établissent la relation entre les anciennes variables (p, q) et les nouvelles (P, Q), et expriment également la nouvelle fonction de Hamilton.

Il peut être commode d'écrire la fonction génératrice non pas au moyen des variables q et Q, mais au moyen des anciennes coordonnées q et des nouvelles impulsions P. Pour établir dans ce cas les formules de changement de variables canoniques, il faut effectuer les transformations de Legendre correspondantes dans la relation (45,6). Plus précisément, écrivons celle-ci sous la forme

$$d\Big(F + \sum P_i Q_i\Big) = \sum p_i \, dq_i + \sum Q_i \, dP_i + (H' - H) \, dt.$$

L'expression différentiée dans le premier membre, écrite avec les variables q, P, constitue la nouvelle fonction génératrice. Désignons-la $\Phi(q, P, t)$ et nous avons [1]

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \tag{45,8}$$

On obtiendra de façon analogue les formules de transformations canoniques exprimées au moyen de fonctions génératrices dépendant des variables p et Q ou p et P.

Notons que la correspondance entre la nouvelle et l'ancienne fonction de Hamilton est toujours la même: la différence $H' - H$ est donnée par la dérivée partielle par rapport au temps de la fonction génératrice. En particulier, si cette dernière ne dépend pas du temps, $H' = H$. Autrement dit, il suffira dans ce cas, pour obtenir la nouvelle fonction de Hamilton, de porter dans H les quantités p, q exprimées en fonction des nouvelles variables P, Q.

L'étendue de la classe des transformations canoniques dans la méthode de Hamilton enlève à la notion de coordonnées et d'impulsions généralisées une grande partie de son sens initial. Puisque les transformations (45,2) relient chacune des grandeurs P, Q aussi bien aux coordonnées q qu'aux impulsions p, on ne peut plus considérer les variables Q comme des coordonnées purement spatiales. La différence entre les deux groupes de variables devient essentiellement une question de nomenclature. Cette circonstance se manifeste de façon très concrète, par exemple, dans la transformation [2] $Q_i = p_i$, $P_i = -q_i$ qui ne change pas évidemment la forme canonique des équations et se ramène simplement à interchanger les noms des coordonnées et des impulsions.

Compte tenu de cette convention de terminologie, les variables p et q sont souvent appelées simplement, dans la méthode de Hamilton, *grandeurs canoniquement conjuguées*.

La condition pour que des variables soient canoniquement conjuguées peut être exprimée à l'aide des crochets de Poisson. Démontrons au préalable le théorème général d'invariance des crochets de Poisson par rapport aux transformations canoniques.

---

[1] Notons qu'en prenant la fonction génératrice sous la forme

$$\Phi = \sum_i f_i(q, t) P_i$$

(où les f_i sont des fonctions arbitraires), nous obtenons une transformation dans laquelle les nouvelles coordonnées $Q_i = f_i(q, t)$, c'est-à-dire qu'elles s'expriment uniquement en fonction des anciennes coordonnées (et non des impulsions). Ce sont des transformations ponctuelles qui constituent naturellement un cas particulier de transformations canoniques.

[2] Pour laquelle la fonction génératrice est alors $F = \sum q_i, Q_i$.

Soit $\{fg\}_{p,\,q}$ le crochet de Poisson des grandeurs f et g dans lequel la dérivation est effectuée par rapport aux variables p et q, et $\{fg\}_{P,\,Q}$ le crochet de Poisson des mêmes grandeurs dérivées par rapport aux variables canoniques P et Q. On a alors:

$$\{fg\}_{p,q}=\{fg\}_{P,Q}. \tag{45,9}$$

On peut vérifier cette relation par un calcul direct, en utilisant les formules de transformation canonique. Il est possible cependant d'éviter les calculs à l'aide du raisonnement suivant.

Remarquons tout d'abord que dans les transformations canoniques (45,7) ou (45,8), le temps joue le rôle d'un paramètre. Par suite, si nous démontrons le théorème (45,9) pour des grandeurs ne dépendant pas explicitement du temps, ce théorème sera également vrai dans le cas général. Considérons maintenant de façon purement formelle la grandeur g comme fonction de Hamilton d'un système fictif. On a alors d'après la formule (42,1) $\{fg\}_{p,\,q} = df/dt$. Mais la dérivée df/dt ne peut dépendre que des propriétés du mouvement (de notre système fictif) en tant que tel, et non de tel ou tel choix de variables. Par suite, le crochet de Poisson $\{fg\}$ ne peut varier lorsqu'on passe d'un groupe de variables canoniques à l'autre.

Des formules (42,13) et du théorème (45,9) on tire:

$$\{Q_iQ_k\}_{p,\,q}=0, \quad \{P_iP_k\}_{p,\,q}=0, \quad \{P_iQ_k\}_{p,\,q}=\delta_{ik}. \tag{45,10}$$

Ces relations, écrites à l'aide des crochets de Poisson, représentent les conditions auxquelles doivent satisfaire les nouvelles variables pour que la transformation $p,\, q \rightarrow P,\, Q$ soit canonique.

Il est intéressant de noter que la variation des grandeurs p, q lors du mouvement lui-même peut être considérée comme une transformation canonique. Voici ce que nous entendons par là. Soit q_t, p_t les valeurs des variables canoniques à l'instant t, et $q_{t+\tau}$, $p_{t+\tau}$ leurs valeurs à un autre instant $t+\tau$. Ces dernières sont fonctions des premières (et de la valeur τ de l'intervalle, en tant que paramètre):

$$q_{t+\tau}=q\,(q_t,\, p_t,\, \tau), \qquad p_{t+\tau}=p\,(q_t,\, p_t,\, \tau).$$

Si on considère ces formules comme une transformation faisant passer des variables q_t, p_t aux variables $q_{t+\tau}$, $p_{t+\tau}$, cette transformation sera canonique.

Cela résulte évidemment de l'expression $dS = \Sigma\,(p_{t+\tau}dq_{t+\tau} - p_tdq_t)$ de la différentielle de l'action $S\,(q_{t+\tau},\, q_t)$ prise le long de la trajectoire réelle passant par les points q_t et $q_{t+\tau}$ aux instants donnés t et $t+\tau$ [cf. (43,7)]. Il résulte de la comparaison de cette formule avec (45,6) que $-S$ est la fonction génératrice de la transformation.

§ 46. Théorème de Liouville

Pour l'interprétation géométrique des phénomènes mécaniques, on utilise souvent la notion d'*espace des phases*: c'est un espace à $2s$ dimensions sur les axes duquel on porte les s coordonnées généralisées et les s impulsions du système mécanique donné. Chaque point de cet espace correspond à un état déterminé du système. Lorsque le système se meut, le point de l'espace des phases qui le représente décrit une ligne correspondante appelée trajectoire dans l'espace des phases.

On peut considérer le produit de différentielles

$$d\Gamma = dq_1 \ldots dq_s \, dp_1 \ldots dp_s$$

comme un « élément de volume » de l'espace des phases. Considérons maintenant l'intégrale $\int d\Gamma$ prise dans un domaine quelconque de cet espace et représentant le volume de ce domaine. Montrons que cette grandeur possède la propriété d'être invariante par rapport aux transformations canoniques: si on transforme canoniquement les variables p, q en variables P, Q, les volumes des régions des espaces p, q, et P, Q qui se correspondent seront les mêmes:

$$\int \ldots \int dq_1 \ldots dq_s \, dp_1 \ldots dp_s = \int \ldots \int dQ_1 \ldots dQ_s \, dP_1 \ldots dP. \tag{46,1}$$

On sait que la transformation des variables dans une intégrale multiple s'effectue suivant la formule

$$\int \ldots \int dQ_1 \ldots dQ_s \, dP_1 \ldots dP_s = \int \ldots \int D \, dq_1 \ldots dq_s \, dp_1 \ldots dp_s,$$

où

$$D = \frac{\partial (Q_1, \ldots, Q_s, P_1, \ldots, P_s)}{\partial (q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s)} \tag{46,2}$$

est le jacobien de la transformation. Par suite, la démonstration du théorème (46,1) revient à démontrer que le jacobien de toute transformation canonique est égal à l'unité:

$$D = 1. \tag{46,3}$$

Utilisons la propriété connue des jacobiens qui permet dans un certain sens de s'en servir comme de fractions. Divisant le « numérateur » et le « dénominateur » par $\partial (q_1, \ldots, q_s, P_1, \ldots, P_s)$ nous obtenons:

$$D = \frac{\partial (Q_1, \ldots, Q_s, P_1, \ldots, P_s)}{\partial (q_1, \ldots, q_s, P_1, \ldots, P_s)} \Big/ \frac{\partial (q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s)}{\partial (q_1, \ldots, q_s, P_1, \ldots, P_s)} .$$

Selon une autre règle connue, un jacobien au « numérateur » et au « dénominateur » duquel figurent des grandeurs identiques se réduit à un jacobien dont le nombre de variables est moindre; pour toutes les dérivations les grandeurs identiques qui tombent ensemble doivent être considérées comme constantes. Ainsi

$$D=\left\{\frac{\partial(Q_1,\ldots,Q_s)}{\partial(q_1,\ldots,q_s)}\right\}_{P=\mathrm{Cte}}\Big/\left\{\frac{\partial(p_1,\ldots,p_s)}{\partial(P_1,\ldots,P_s)}\right\}_{q=\mathrm{Cte}}. \qquad (46,4)$$

Considérons le jacobien qui se trouve au numérateur de cette expression. Par définition, c'est un déterminant de rang s dont les éléments sont les $\partial Q_i/\partial q_k$ (l'élément $\partial Q_i/\partial q_k$ se trouve à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $k^{\text{ème}}$ colonne). En écrivant la transformation canonique à l'aide de la fonction génératrice $\Phi(q, P)$ sous sa forme (45,8), nous obtenons:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_k\,\partial P_i}.$$

On trouve de la même façon que l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $k^{\text{ème}}$ colonne du déterminant qui se trouve au dénominateur de (46,4) est égal à $\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_i\partial P_k}$. Cela signifie que les lignes de l'un des déterminants sont identiques aux colonnes de l'autre et réciproquement. Les deux déterminants sont donc égaux, de sorte que le rapport (46,4) est égal à ce qu'il fallait démontrer.

Supposons maintenant que chaque point d'un élément donné de l'espace des phases se déplace dans le temps conformément aux équations du mouvement du système mécanique envisagé. Par là même, tout l'élément se déplacera, son volume restant inchangé:

$$\int d\Gamma=\mathrm{Cte}. \qquad (46,5)$$

Cette affirmation (appelée *théorème de Liouville*) résulte immédiatement de l'invariance d'un volume de l'espace des phases par rapport aux transformations canoniques, et du fait que la variation de p et q au cours du mouvement peut être elle-même considérée (ainsi que nous l'avons montré à la fin du paragraphe précédent) comme une transformation canonique.

On démontrera de façon absolument analogue l'invariance des intégrales

$$\iint\sum_i dq_i\,dp_i,$$

$$\iiiint\sum_{i\neq k} dq_i\,dp_i\,dq_k\,dp_k,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

dans lesquelles l'intégration est étendue à des variétés bidimensionnelles, quadridimensionnelles, etc., de l'espace des phases.

§ 47. Equations de Hamilton-Jacobi

Nous avons introduit au § 43 la notion d'action comme fonction des coordonnées et du temps. Nous avons montré que la dérivée partielle par rapport au temps de cette fonction $S(q, t)$ était liée à la fonction de Hamilton par la relation

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H(q, p, t)=0,$$

et que ses dérivées partielles par rapport aux coordonnées coïncidaient avec les impulsions. Remplaçant donc les impulsions p dans la fonction de Hamilton par les dérivées $\partial S/\partial q$, nous obtenons l'équation

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_1, \ldots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t\right)=0, \tag{47,1}$$

à laquelle doit satisfaire la fonction $S(q, t)$. C'est une équation aux dérivées partielles du premier ordre, appelée *équation de Hamilton-Jacobi.*

De même que les équations de Lagrange et les équations canoniques, l'équation de Hamilton-Jacobi constitue le point de départ d'une méthode générale d'intégration des équations du mouvement.

Avant d'exposer cette méthode, rappelons que toute équation aux dérivées partielles du premier ordre possède une solution dépendant d'une fonction arbitraire; cette solution est appelée intégrale générale de l'équation. Dans les applications mécaniques cependant, ce n'est pas l'intégrale générale de l'équation de Hamilton-Jacobi qui joue un rôle essentiel, mais ce qu'on appelle l'intégrale *complète*; on désigne ainsi la solution d'une équation aux dérivées partielles qui contient autant de constantes arbitraires indépendantes qu'il y a de variables indépendantes.

Dans l'équation de Hamilton-Jacobi, ces variables indépendantes sont les coordonnées et le temps. Par suite, pour un système à s degrés de liberté, l'intégrale complète de cette équation doit contenir $s+1$ constantes arbitraires. Mais puisque la fonction S ne figure dans l'équation que par ses dérivées, l'une des constantes arbitraires apparaît dans l'intégrale complète comme une grandeur additive, c'est-à-dire que l'intégrale complète de l'équation de Hamilton-Jacobi prend la forme

$$S=f(t, q_1, \ldots, q_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s)+A, \tag{47,2}$$

où les $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ et A sont des constantes arbitraires [1].

---

[1] Bien que l'intégrale générale de l'équation de Hamilton-Jacobi ne nous soit pas utile, montrons qu'on peut la trouver si on connaît son intégrale complète. Nous considérerons pour cela la grandeur A comme une fonction arbi-

Dégageons maintenant la relation entre l'intégrale complète de l'équation de Hamilton-Jacobi et la solution des équations du mouvement qui nous intéresse. Pour cela, passons par une transformation canonique des grandeurs q, p à de nouvelles variables, en choisissant comme fonction génératrice la fonction $f(t, q; \alpha)$ et comme nouvelles impulsions les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$. Désignons par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ les nouvelles coordonnées. Puisque la fonction génératrice dépend des anciennes coordonnées et des nouvelles impulsions, nous devons utiliser les formules (45,8) :

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \quad H' = H + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Mais comme la fonction f satisfait à l'équation de Hamilton-Jacobi, on voit que la nouvelle fonction de Hamilton s'annule identiquement :

$$H' = H + \frac{\partial f}{\partial t} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Les équations canoniques des nouvelles variables ont donc la forme $\dot{\alpha}_i = 0$, $\dot{\beta}_i = 0$, d'où il résulte que

$$\alpha_i = \text{Cte}, \quad \beta_i = \text{Cte}. \tag{47,3}$$

D'autre part, les s équations

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \beta_i$$

permettent d'exprimer les s coordonnées q en fonction du temps et des $2s$ constantes α et β. Par là même, nous obtenons l'intégrale générale des équations du mouvement.

---

traire des autres constantes

$$S = f(t, q_1, \ldots, q_s;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_s) + A(\alpha_1, \ldots, \alpha_s).$$

En remplaçant ici les α_1 par les fonctions des coordonnées et du temps que nous tirons des s conditions

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = 0,$$

nous obtenons une intégrale générale qui dépend de la forme de la fonction arbitraire $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$. En effet, pour la fonction S ainsi obtenue nous avons :

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha + \sum_k \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_k}\right)_q \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha.$$

Mais les $(\partial S/\partial q_i)_\alpha$ obéissent à l'équation de Hamilton-Jacobi puisque la fonction $S(t, q; \alpha)$ est par hypothèse intégrale complète de cette équation. Les dérivées $\partial S/\partial q_i$ y satisfont donc également.

Ainsi, la solution du problème du mouvement d'un système mécanique par la méthode de Hamilton-Jacobi se ramène aux opérations suivantes.

Partant de la fonction de Hamilton, on écrit l'équation de Hamilton-Jacobi et on cherche l'intégrale complète (47,2) de cette équation. En la dérivant par rapport aux constantes arbitraires α et en égalant ces dérivées aux nouvelles constantes β, nous obtenons un système de s équations algébriques

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i. \qquad (47,4)$$

La solution de ce système nous donne les coordonnées q en fonction du temps et des $2s$ constantes arbitraires. On trouvera ensuite la relation entre les impulsions et le temps à l'aide des équations $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$.

Si nous avons une intégrale incomplète de l'équation de Hamilton-Jacobi dépendant d'un nombre de constantes arbitraires inférieur s, bien qu'on ne puisse pas à l'aide de cette intégrale trouver l'intégrale générale des équations du mouvement, on peut cependant simplifier quelque peu ce problème. Ainsi, si la fonction S est connue et contient une constante arbitraire α, la relation

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \text{Cte}$$

donne une équation reliant $q_1, \ldots, q_s$, et t.

L'équation de Hamilton-Jacobi prend une forme un peu plus simple dans le cas où la fonction H ne dépend pas explicitement du temps, c'est-à-dire quand le système est conservatif. La dépendance de l'action par rapport au temps se réduit alors au terme $-Et$:

$$S = S_0(q) - Et \qquad (47,5)$$

(voir § 44), et en substituant dans (47,1), nous obtenons pour l'action réduite $S_0(q)$ l'équation de Hamilton-Jacobi sous la forme

$$H\left(q_1, \ldots, q_s;\ \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right) = E. \qquad (47,6)$$

§ 48. Séparation des variables

Dans un certain nombre de cas importants, on peut trouver l'intégrale complète de l'équation de Hamilton-Jacobi par la méthode de *séparation des variables.*

Admettons qu'une coordonnée, appelons-la q_1, et la dérivée $\partial S/\partial q_1$ correspondante n'entrent dans l'équation de Hamilton-

Jacobi que sous la forme d'une combinaison du type $\varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)$, ne contenant pas d'autres coordonnées ni d'autres dérivées (ni le temps); autrement dit, admettons que l'équation soit de la forme

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S}{\partial q_i}, \frac{\partial S}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)\right\}=0, \tag{48,1}$$

où q_i désigne l'ensemble des coordonnées à l'exception de q_1.

On cherchera dans ce cas une solution sous forme de la somme

$$S=S'(q_i, t)+S_1(q_1). \tag{48,2}$$

Portant cette expression dans l'équation (48,1), il vient :

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right)\right\}=0. \tag{48,3}$$

Supposons (48,2) trouvée. Après substitution dans (48,3), cette dernière doit alors se transformer en une identité, valable en particulier quelle que soit la valeur de la coordonnée q_1. Or, seule peut varier la fonction φ quand q_1 varie; par suite, pour que l'expression (48,3) soit une identité, il faut et il suffit que φ soit constante. Ainsi, l'équation (48,3) se scinde en deux équations

$$\varphi\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right)=\alpha_1, \tag{48,4}$$

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \alpha_1\right\}=0, \tag{48,5}$$

où α_1 est une constante arbitraire. La première de ces équations est une équation différentielle ordinaire d'où on peut tirer la fonction $S_1(q_1)$ par une simple intégration. Il reste alors l'équation aux dérivées partielles (48,5), mais qui contient un nombre moindre de variables indépendantes.

Si on peut de cette façon séparer successivement les s coordonnées et le temps, le calcul de l'intégrale complète de l'équation de Hamilton-Jacobi se ramènera à des quadratures. Pour un système conservatif, il s'agit uniquement en fait de la séparation des s variables (coordonnées) dans l'équation (47,6), et pour une séparation complète, l'intégrale cherchée prend la forme

$$S=\sum_k S_k(q_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_s)-E(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)\,t, \tag{48,6}$$

où chacune des fonctions S_k dépend seulement d'une coordonnée et où l'énergie E comme fonction de constantes arbitraires $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ s'obtient en portant $S_0=\Sigma S_k$ dans l'équation (47,6).

Un cas particulier de séparation des variables est celui où l'une des variables est cyclique. La coordonnée cyclique q_1 n'entre jamais

sous forme explicite dans la fonction de Hamilton, et, par conséquent, non plus dans l'équation de Hamilton-Jacobi. La fonction $\varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)$ s'écrit alors simplement $\partial S/\partial q_1$, et de l'équation (48,4) on tire $S_1 = \alpha_1 q_1$, de sorte que

$$S = S'(q_i, t) + \alpha_1 q_1. \tag{48,7}$$

La constante α_1 n'est ici rien d'autre que la valeur constante $p_1 = \partial S/\partial q_1$ de l'impulsion correspondant à la coordonnée cyclique. Notons que la séparation du temps dans le terme $-Et$ pour un système conservatif correspond également à la méthode de séparation des variables en prenant t pour « variable cyclique ».

Ainsi, la méthode de séparation des variables dans l'équation de Hamilton-Jacobi englobe tous les cas envisagés plus haut de simplification de l'intégration des équations du mouvement, basés sur l'utilisation des variables cycliques. S'y ajoutent tous les cas où la séparation des variables est possible bien que les coordonnées ne soient pas cycliques. Il résulte de tout cela que pour la recherche de l'intégrale générale des équations du mouvement, la méthode de Hamilton-Jacobi est la plus efficace.

Pour séparer les variables dans l'équation de Hamilton-Jacobi, il est essentiel de choisir convenablement les coordonnées. Prenons, dans divers systèmes de coordonnées, quelques exemples qui peuvent présenter un intérêt physique en ce qui concerne les problèmes du mouvement d'un point matériel dans différents champs extérieurs.

1. *Coordonnées sphériques.* Avec ces coordonnées (r, θ, φ) la fonction de Hamilton s'écrit:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + U(r, \theta, \varphi)$$

et les variables peuvent être séparées, si

$$U = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\varphi)}{r^2 \sin^2\theta},$$

où $a(r)$, $b(\theta)$, $c(\varphi)$ sont des fonctions arbitraires. Le dernier terme de cette expression ne peut guère présenter d'intérêt au point de vue physique; nous envisagerons donc un champ de la forme

$$U = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2}. \tag{48,8}$$

L'équation de Hamilton-Jacobi pour la fonction S_0 est dans ce cas

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2 + a(r) + \frac{1}{2mr^2}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial \theta}\right)^2 + 2mb(\theta)\right] + \\ + \frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\right)^2 = E.$$

Compte tenu du fait que la coordonnée φ est cyclique, cherchons une solution du type

$$S_0 = p_\varphi \varphi + S_1(r) + S_2(\theta)$$

et nous obtenons pour les fonctions $S_1(r)$ et $S_2(\theta)$ les équations

$$\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 + 2mb(\theta) + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \beta, \quad \frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + a(r) + \frac{\beta}{2mr^2} = E.$$

Leur intégration donne finalement :

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \int \sqrt{\beta - 2mb(\theta) - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\, d\theta + \int \sqrt{2m[E - a(r)] - \frac{\beta}{r^2}}\, dr. \qquad (48,9)$$

On a ici pour constantes arbitraires p_φ, β, E ; en dérivant par rapport à ces dernières et en égalant le résultat à de nouvelles constantes, on trouve la solution générale des équations du mouvement.

2. *Coordonnées paraboliques.* On passe des coordonnées cylindriques (que nous désignerons dans ce paragraphe par ρ, φ, z) aux coordonnées paraboliques ξ, η, φ au moyen des formules

$$z = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad \rho = \sqrt{\xi\eta}. \qquad (48,10)$$

Les coordonnées ξ et η prennent toutes les valeurs de 0 à ∞ ; les surfaces ξ = Cte et η = Cte constituent, comme il est facile de le vérifier, deux familles de paraboloïdes de révolution (avec z pour axe de symétrie). On peut mettre la relation (48,10) sous une autre forme en introduisant le rayon

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2} = \frac{1}{2}(\xi + \eta). \qquad (48,11)$$

On a alors :

$$\xi = r + z, \quad \eta = r - z. \qquad (48,12)$$

Etablissons la fonction de Lagrange d'un point matériel dans les coordonnées ξ, η, φ. En dérivant les expressions (48,10) par rapport au temps et portant dans

$$L = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) - U(\rho, \varphi, z)$$

(fonction de Lagrange en coordonnées cylindriques), on obtient :

$$L = \frac{m}{8}(\xi + \eta)\left(\frac{\dot\xi^2}{\xi} + \frac{\dot\eta^2}{\eta}\right) + \frac{m}{2}\xi\eta\dot\varphi^2 - U(\xi, \eta, \varphi). \qquad (48,13)$$

Les impulsions sont

$$p_\xi = \frac{m}{4\xi}(\xi+\eta)\dot{\xi}, \quad p_\eta = \frac{m}{4\eta}(\xi+\eta)\dot{\eta},$$

$$p_\varphi = m\xi\eta\dot{\varphi}$$

et la fonction de Hamilton

$$H = \frac{2}{m}\frac{\xi p_\xi^2 + \eta p_\eta^2}{\xi+\eta} + \frac{p_\varphi^2}{2m\xi\eta} + U(\xi, \eta, \varphi). \tag{48,14}$$

Les cas physiquement intéressants de séparation des variables dans ces coordonnées correspondent à une énergie potentielle du type

$$U = \frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi+\eta} = \frac{a(r+z)+b(r-z)}{2r}. \tag{48,15}$$

On a l'équation

$$\frac{2}{m(\xi+\eta)}\left[\xi\left(\frac{\partial S_0}{\partial\xi}\right)^2 + \eta\left(\frac{\partial S_0}{\partial\eta}\right)^2\right] + \frac{1}{2m\xi\eta}\left(\frac{\partial S_0}{\partial\varphi}\right)^2 + \frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi+\eta} = E.$$

La coordonnée cyclique φ se sépare sous la forme $p_\varphi\varphi$. Multipliant ensuite l'équation par $m(\xi+\eta)$ et regroupant les termes, on obtient :

$$2\xi\left(\frac{\partial S_0}{\partial\xi}\right)^2 + ma(\xi) - mE(\xi) + \frac{p_\varphi^2}{2\xi} +$$
$$+ 2\eta\left(\frac{\partial S_0}{\partial\eta}\right)^2 + mb(\eta) - mE\eta + \frac{p_\varphi^2}{2\eta} = 0.$$

Posant

$$S_0 = p_\varphi\varphi + S_1(\xi) + S_2(\eta),$$

on a les deux équations

$$2\xi\left(\frac{dS_1}{d\xi}\right)^2 + ma(\xi) - mE\xi + \frac{p_\varphi^2}{2\xi} = \beta,$$

$$2\eta\left(\frac{dS_2}{d\eta}\right)^2 + mb(\eta) - mE\eta + \frac{p_\varphi^2}{2\eta} = -\beta$$

dont l'intégration donne finalement :

$$S = -Et + p_\varphi\varphi + \int\sqrt{\frac{mE}{2} + \frac{\beta}{2\xi} - \frac{ma(\xi)}{2\xi} - \frac{p_\varphi^2}{4\xi^2}}\,d\xi +$$
$$+ \int\sqrt{\frac{mE}{2} - \frac{\beta}{2\eta} - \frac{mb(\eta)}{2\eta} - \frac{p_\varphi^2}{4\eta^2}}\,d\eta \tag{48,16}$$

avec p_φ, β, E pour constantes arbitraires.

3. *Coordonnées elliptiques.* Ces coordonnées ξ, η, φ découlent des formules

$$\rho = \sigma \sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}, \qquad z = \sigma\xi\eta. \tag{48,17}$$

La constante σ est le paramètre de la transformation. La coordonnée ξ prend toutes les valeurs de 1 à ∞ et la coordonnée η de -1 à $+1$. On obtient des relations géométriquement plus concrètes en introduisant les distances r_1 et r_2 aux points A_1 et A_2 de l'axe z ayant pour coordonnées $z = \sigma$ et $z = -\sigma$[1]:

$$r_1 = \sqrt{(z-\sigma)^2+\rho^2}, \quad r_2 = \sqrt{(z+\sigma)^2+\rho^2}.$$

Substituant ici les expressions (48,17) on a:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \sigma(\xi-\eta), & r_2 &= \sigma(\xi+\eta), \\ \xi &= \frac{r_2+r_1}{2\sigma}, & \eta &= \frac{r_2-r_1}{2\sigma}. \end{aligned}\right\} \tag{48,18}$$

Transformons la fonction de Lagrange des coordonnées cylindriques en coordonnées elliptiques, nous trouvons:

$$L = \frac{m\sigma^2}{2}(\xi^2-\eta^2)\left(\frac{\dot\xi^2}{\xi^2-1}+\frac{\dot\eta^2}{1-\eta^2}\right) + \frac{m\sigma^2}{2} \times$$
$$\times (\xi^2-1)(1-\eta^2)\dot\varphi^2 - U(\xi, \eta, \varphi). \tag{48,19}$$

D'où pour la fonction de Hamilton:

$$H = \frac{1}{2m\sigma^2(\xi^2-\eta^2)}\Big[(\xi^2-1)p_\xi^2 - (1-\eta^2)p_\eta^2 +$$
$$+ \left(\frac{1}{\xi^2-1}+\frac{1}{1-\eta^2}\right)p_\varphi^2\Big] + U(\xi, \eta, \varphi). \tag{48,20}$$

Les cas physiquement intéressants de séparation des variables correspondent à l'énergie potentielle

$$U = \frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi^2-\eta^2} = \frac{\sigma^2}{r_1 r_2}\left\{a\left(\frac{r_2+r_1}{2\sigma}\right) + b\left(\frac{r_2-r_1}{2\sigma}\right)\right\}, \tag{48,21}$$

---

[1] Les lignes $\xi = \mathrm{Cte}$ représentent la famille d'ellipsoïdes

$$\frac{z^2}{\sigma^2\xi^2} + \frac{\rho^2}{\sigma^2(\xi^2-1)} = 1$$

de foyers A_1 et A_2, et les lignes $\eta = \mathrm{Cte}$, la famille d'hyperboloïdes

$$\frac{z^2}{\sigma^2\eta^2} - \frac{\rho^2}{\sigma^2(1-\eta^2)} = 1$$

de mêmes foyers.

1/4 14-640

où $a(\xi)$ et $b(\eta)$ sont des fonctions arbitraires. Le résultat de la séparation des variables dans l'équation de Hamilton-Jacobi s'écrit :

$$S = -Et + p_\varphi\varphi + \int \sqrt{2m\sigma^2 E + \frac{\beta - 2m\sigma^2 a(\xi)}{\xi^2 - 1} - \frac{p_\varphi^2}{(\xi^2-1)^2}}\, d\xi + \\ + \int \sqrt{2m\sigma^2 E - \frac{\beta + 2m\sigma^2 b(\eta)}{1-\eta^2} - \frac{p_\varphi^2}{(1-\eta^2)^2}}\, d\eta. \qquad (48,22)$$

Problèmes

1. Trouver l'intégrale complète de l'équation de Hamilton-Jacobi pour une particule en mouvement dans un champ

$$U = \frac{\alpha}{r} - Fz$$

(superposition d'un champ coulombien et d'un champ uniforme).

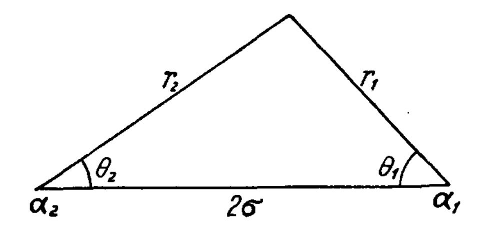


Fig. 55.

Solution. Le champ donné se rapporte au type (48,15) et on a :

$$a(\xi) = \alpha - \frac{F}{2}\xi^2, \quad b(\eta) = \alpha + \frac{F}{2}\eta^2$$

La formule (48,16) donne :

$$S = -Et + p_\varphi\varphi + \int \sqrt{\frac{mE}{2} - \frac{m\alpha - \beta}{2\xi} - \frac{p_\varphi^2}{4\xi^2} + \frac{mF\xi}{4}}\, d\xi + \\ + \int \sqrt{\frac{mE}{2} - \frac{m\alpha + \beta}{2\eta} - \frac{p_\varphi^2}{4\eta^2} - \frac{mF\eta}{4}}\, d\eta$$

avec p_φ, E, β pour constantes arbitraires. La constante β a dans ce cas un sens bien déterminé : elle exprime la conservation de la quantité

$$\beta = -m\left[\frac{\alpha z}{r} + \frac{p_\rho}{m}(zp_\rho - \sigma p_z)\right] - \frac{m}{2}F\rho^2$$

(fonction uniforme des coordonnées et des impulsions de la particule). L'expression entre crochets représente l'intégrale première spécifique d'un champ purement coulombien (voir § 15).

2. Même problème pour un champ

$$U = \frac{\alpha_1}{r_1} + \frac{\alpha_2}{r_2}$$

(champ coulombien de deux centres immobiles situés à une distance 2σ l'un de l'autre).

Solution. Le champ donné se rapporte au type (48,21) et on a:

$$a(\xi)=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\sigma}\xi,\quad b(\eta)=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\sigma}\eta.$$

La formule (48,22) donne:

$$S=-Et+p_\varphi\varphi+\int\sqrt{2m\sigma^2E+\frac{\beta-2m\sigma(\alpha_1+\alpha_2)\xi}{\xi^2-1}-\frac{p_\varphi^2}{(\xi^2-1)^2}}\,d\xi+$$

$$+\int\sqrt{2m\sigma^2E-\frac{\beta+2m\sigma(\alpha_1-\alpha_2)\eta}{1-\eta^2}-\frac{p_\varphi^2}{(1-\eta^2)^2}}\,d\eta.$$

La constante β exprime dans ce cas la conservation de la quantité

$$\beta=\sigma^2p_\rho^2-M^2+2m\sigma(\alpha_1\cos\theta_1+\alpha_2\cos\theta_2),$$

où M est le moment cinétique total de la particule, et θ_1 et θ_2, les angles indiqués sur la fig. 55.

§ 49. Invariants adiabatiques

Considérons un système mécanique animé d'un mouvement linéaire fini et caractérisé par un paramètre λ définissant les propriétés du système lui-même ou du champ extérieur dans lequel il se trouve.

Supposons que sous l'influence de certaines causes extérieures, le paramètre λ varie lentement (c'est-à-dire adiabatiquement) avec le temps; nous appelons « lente » une transformation pour laquelle λ varie peu au cours d'une période T du mouvement du système:

$$T\frac{d\lambda}{dt}\ll\lambda. \qquad (49,1)$$

Un tel système n'est pas fermé et son énergie E ne se conserve pas. Mais du fait que λ varie lentement, on peut poser que la vitesse $\dot{E}$ de variation de l'énergie est proportionnelle à la vitesse $\dot{\lambda}$ de variation du paramètre λ. Cela signifie que lorsque λ varie, l'énergie du système se comporte comme une fonction de λ. Autrement dit, il existe une relation entre E et λ qui reste inchangée au cours du mouvement du système; cette grandeur est appelée *invariant adiabatique*.

Soit $H(p, q; \lambda)$ la fonction de Hamilton du système, dépendant du paramètre λ. D'après (40,5) la dérivée totale de l'énergie par rapport au temps est

$$\frac{dE}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial t}.$$

Prenons la moyenne de cette égalité pour une période du mouvement; compte tenu de la lenteur de la variation de λ (et par conséquent de $\dot{\lambda}$), on peut ne pas surligner $\dot{\lambda}$:

$$\overline{\frac{dE}{dt}}=\frac{d\lambda}{dt}\overline{\frac{\partial H}{\partial\lambda}},$$

et, dans la fonction $\partial H/\partial\lambda$ prise en moyenne, considérer comme grandeurs variables les seuls p et q, et non λ. En d'autres termes, on prend les moyennes comme si le mouvement avait lieu avec λ constant.

Explicitons la valeur moyenne de l'énergie :

$$\overline{\frac{dE}{dt}}=\frac{d\lambda}{dt}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\partial H}{\partial\lambda}\,dt.$$

D'après l'équation de Hamilton $\dot{q}=\partial H/\partial p$ on a :

$$dt=\frac{dq}{\dfrac{\partial H}{\partial p}}.$$

A l'aide de cette égalité, remplaçons l'intégration par rapport au temps par une intégration par rapport à la coordonnée; ce faisant, nous mettrons la période T sous la forme

$$T=\int_0^T dt=\oint\frac{dq}{\dfrac{\partial H}{\partial p}};$$

le signe $\oint$ désigne ici l'intégration par rapport à la variation totale (« en avant » et « en arrière ») de la coordonnée au cours d'une période[1]. Par suite,

$$\overline{\frac{dE}{dt}}=\frac{d\lambda}{dt}\frac{\oint\dfrac{\partial H/\partial\lambda}{\partial H/\partial p}\,dq}{\oint\dfrac{dq}{\partial H/\partial p}}. \tag{49,2}$$

Comme on l'a déjà indiqué, les intégrales contenues dans cette formule doivent être prises le long de la trajectoire, λ étant constant. Le long d'une telle trajectoire, la fonction de Hamilton conserve

[1] Si le mouvement du système est une rotation et si la coordonnée q est représentée par l'angle de rotation φ, l'intégration par rapport à $d\varphi$ doit être effectuée pour un « tour complet », c'est-à-dire de 0 à 2π.

la valeur constante E, et l'impulsion est une fonction définie de la coordonnée variable q et des deux paramètres constants indépendants E et λ. En désignant sous le nom d'impulsion une fonction telle que $p(q; E, \lambda)$ et en dérivant $H(p, q; \lambda) = E$ par rapport au paramètre λ, on obtient:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0$$

ou

$$\frac{\partial H/\partial \lambda}{\partial H/\partial p} = -\frac{\partial p}{\partial \lambda}.$$

Portant ce résultat dans l'intégrale du numérateur de (49,2) et écrivant dans celle du dénominateur la fonction sous le signe somme sous la forme $\partial p/\partial E$, on a:

$$\frac{\overline{dE}}{dt} = -\frac{d\lambda}{dt}\frac{\oint \frac{\partial p}{\partial \lambda}\,dq}{\oint \frac{\partial p}{\partial E}\,dq} \qquad (49,3)$$

ou

$$\oint \left(\frac{\partial p}{\partial E}\frac{\overline{\partial E}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt}\right) dq = 0.$$

Cette égalité peut s'écrire finalement:

$$\frac{\overline{dI}}{dt} = 0, \qquad (49,4)$$

où I désigne l'intégrale

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\,dq, \qquad (49,5)$$

prise le long de la trajectoire, E et λ étant données. Ce résultat montre que dans l'approximation considérée, la quantité I, restant constante pendant la variation du paramètre λ, est un invariant adiabatique [1].

La grandeur I est fonction de l'énergie du système (et du paramètre λ). Notons que sa dérivée partielle par rapport à l'énergie

$$2\pi\frac{\partial I}{\partial E} = \oint \frac{\partial p}{\partial E}\,dq$$

(l'intégrale est celle du dénominateur de (49,3)) est la période du mouvement du système

$$2\pi\frac{\partial I}{\partial E} = T. \qquad (49,6)$$

[1] On peut montrer que I diffère d'une valeur constante par une quantité exponentiellement petite (si la fonction $\lambda(t)$ n'a pas de singularités).

On peut attribuer à l'intégrale (49,5) une signification géométrique concrète en utilisant la notion de trajectoire dans l'espace des phases du système. Dans le cas donné (un seul degré de liberté), l'espace des phases se réduit à un système de coordonnées p, q à deux dimensions, et la trajectoire dans l'espace des phases du système, dont le mouvement est périodique, est représentée par une courbe fermée dans ce plan. L'intégrale (49,5), prise le long de cette courbe, représente sa surface intérieure. Il est évident qu'on peut l'écrire aussi bien sous la forme de l'intégrale curviligne

$$I = -\frac{1}{2\pi} \oint q\, dp$$

que de l'intégrale de surface

$$I = \frac{1}{2\pi} \int dp\, dq.$$

A titre d'exemple, déterminons l'invariant adiabatique d'un oscillateur linéaire. Sa fonction de Hamilton est

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2},$$

où ω est la fréquence propre de l'oscillateur. L'équation de la trajectoire des phases est donnée par la loi de conservation de l'énergie $H(p, q) = E$. C'est une ellipse de demi-axes $\sqrt{2mE}$ et $\sqrt{2E/m\omega^2}$ dont la surface (divisée par 2π) est

$$I = \frac{E}{\omega}. \tag{49,7}$$

L'invariance adiabatique de cette grandeur signifie que pour une variation lente des paramètres de l'oscillateur, son énergie varie proportionnellement à la fréquence [1].

---

[1] La question de la précision de la conservation de l'invariant adiabatique (49,7) se réduit à l'établissement du lien entre les coefficients $c_\pm$ dans les expressions asymptotiques (pour $t \to \pm\infty$) $q = \mathrm{Re}(c_\pm e^{i\omega_\pm t})$ des solutions de l'équation du mouvement de l'oscillateur $q + \omega^2(t)\, q = 0$, où la fréquence ω est une fonction lentement variable du temps (qui tend vers les limites constantes $\omega_\pm$ lorsque $t \to \pm\infty$); les valeurs limites I s'expriment en fonction de ces coefficients par la relation $\frac{1}{2}\omega_\pm |c_\pm|^2$. La solution de ce problème peut être empruntée à la mécanique quantique, si l'on note la coïncidence formelle de l'équation du mouvement écrite avec l'équation de Schrödinger $\psi'' + k^2(x)\psi = 0$ pour le mouvement unidimensionnel d'une particule au-dessus d'une « barrière de potentiel » lentement variable (quasi classique) ; le problème de la détermination du lien entre les expressions asymptotiques (pour $x \to \pm\infty$) de ψ consiste à trouver le

La grandeur I permet de formuler de façon nouvelle les équations du mouvement d'un système (à paramètres constants).

Transformons canoniquement les variables p, q, en prenant I comme nouvelle « impulsion ». C'est l'« action réduite » S_0, exprimée en fonction de q et I, qui doit jouer ici le rôle de fonction génératrice. En effet, S_0 est définie pour une énergie donnée du système. Mais pour un système fermé, I est fonction de la seule énergie, et par suite, on peut aussi bien exprimer S_0 comme fonction $S_0(q, I)$, et la dérivée partielle $\left(\frac{\partial S_0}{\partial q}\right)_E = p$ coïncidera vec la dérivée $\left(\frac{\partial S_0}{\partial q}\right)_I$ pour I constant. On a par conséquent

$$p = \frac{\partial S_0(q, I)}{\partial q}, \tag{49,8}$$

ce qui correspond à la première des formules de transformation canonique (45,8). La deuxième de ces formules définit la nouvelle « coordonnée », que nous noterons w:

$$w = \frac{\partial S_0(q, I)}{\partial I}. \tag{49,9}$$

Les variables I et w sont appelées *variables canoniques*, où I est la *variable d'action* et w *variable angulaire*.

Puisque la fonction génératrice $S_0(q, I)$ ne dépend pas explicitement du temps, la nouvelle fonction de Hamilton H' coïncide avec l'ancienne H exprimée en fonction des nouvelles variables. Autrement dit, H' représente l'énergie $E(I)$, exprimée en fonction de la variable d'action. Les équations de Hamilton des variables canoniques s'écrivent, par conséquent,

$$\dot{I} = 0, \qquad \dot{w} = \frac{dE(I)}{dI}. \tag{49,10}$$

La première donne, comme il se doit, $I = \text{Cte}$ et il en est de même pour l'énergie. La seconde montre que la variable angulaire est fonction linéaire du temps

$$w = \frac{dE}{dI} t + \text{Cte}. \tag{49,11}$$

L'action $S_0(q, I)$ est une fonction non univoque des coordonnées. Au bout de chaque période, cette fonction ne reprend pas sa valeur

« facteur de réflexion » par la barrière de potentiel (cf. *Mécanique quantique*, § 52).

Ce procédé pour résoudre le problème de la précision de la conservation de l'invariant adiabatique d'un oscillateur appartient à L. P. Pitaevski. On trouvera les calculs correspondants dans l'article de A. M. Dykhné, Journal de Physique Expérimentale et Théorique, 38, 570 (1960).

initiale, mais reçoit l'accroissement

$$\Delta S_0 = 2\pi I, \tag{49,12}$$

ce qui est évident d'après la formule $S_0 = \int p\,dq$ et la définition (49,5). L'accroissement de la variable angulaire pendant le même temps est par suite

$$\Delta w = \Delta \frac{\partial S_0}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial I} \Delta S_0 = 2\pi \tag{49,13}$$

(ce qu'on peut vérifier immédiatement à l'aide de la formule (49,11) et de l'expression (49,6) de la période).

Inversement, si nous exprimons q et p (ou toute fonction uniforme $F(p, q)$ de ces variables) comme fonctions des variables canoniques, celles-ci resteront inchangées lorsque w varie de 2π (pour une valeur donnée de I). En d'autres termes, toute fonction uniforme $F(p, q)$ exprimée au moyen de variables canoniques est une fonction périodique de w, de période 2π.

§ 50. Propriétés générales du mouvement dans l'espace

Considérons un système à plusieurs degrés de liberté, effectuant un mouvement fini (par rapport à toutes les coordonnées). Supposons que le problème admette une séparation complète des variables dans la méthode de Hamilton-Jacobi. Cela signifie que pour un choix convenable des coordonnées, l'action réduite est égale à la somme

$$S_0 = \sum_i S_i(q_i), \tag{50,1}$$

chacune de ces fonctions dépendant d'une seule coordonnée.

Les impulsions généralisées étant

$$p_i = \frac{\partial S_0}{\partial q_i} = \frac{dS_i}{dq_i},$$

chacune des fonctions S_i peut s'écrire

$$S_i = \int p_i\,dq_i. \tag{50,2}$$

Ces fonctions ne sont pas uniformes. Le mouvement du système étant fini, chaque coordonnée ne peut prendre que les valeurs comprises dans un intervalle fini déterminé. Lorsque les q_i varient « en avant » et « en arrière » dans cette intervalle l'action reçoit l'accroissement

$$\Delta S_0 = \Delta S_i - 2\pi I_i, \tag{50,3}$$

où I_i est l'intégrale

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i \, dq_i, \tag{50,4}$$

étendue à la variation indiquée de q_i [1].

Effectuons maintenant la transformation canonique, de la même façon qu'au paragraphe précédent, pour le cas d'un degré de liberté. On aura pour nouvelles variables les « variables d'action » I_i et les « variables angulaires »

$$w_i = \frac{\partial S_0 (q, I)}{\partial I_i} = \sum_k \frac{\partial S_k (q_k, I)}{\partial I_i}, \tag{50,5}$$

où c'est de nouveau l'action, exprimée en fonction des coordonnées et de I_i, qui joue le rôle de fonction génératrice ; avec ces variables, les équations du mouvement

$$\dot{I}_i = 0, \quad \dot{w}_i = \frac{\partial E (I)}{\partial I_i}$$

donnent

$$I_i = \text{Cte}, \tag{50,6}$$

$$w_i = \frac{\partial E (I)}{\partial I_i} t + \text{Cte}. \tag{50,7}$$

Nous aboutissons à un résultat analogue à (49,13), à une variation complète (« en avant » et « en arrière ») de la coordonnée q_i correspond la variation de w_i de 2π :

$$\Delta w_i = 2\pi. \tag{50,8}$$

Autrement dit, les $w_i (q, I)$ sont des fonctions multiformes des coordonnées qui, lorsque celles-ci reviennent à leur valeur initiale, peuvent varier d'un nombre entier de fois 2π. Cette propriété peut être formulée aussi comme propriété de la fonction $w_i (p, q)$ (exprimée au moyen de la coordonnée et de l'impulsion) dans l'espace des phases du système. Puisque les I_i eux-mêmes sont des fonctions uniformes par rapport aux variables p et q, on obtient, en portant $I_i (p, q)$ dans $w_i (q, I)$, une fonction $w_i (p, q)$ qui, lorsqu'elle parcourt une courbe fermée quelconque dans l'espace des phases, peut varier d'un multiple entier de 2π (y compris 0).

---

[1] Soulignons cependant qu'il s'agit ici d'une variation formelle de la coordonnée q_i dans tout l'intervalle possible, et non de sa variation au cours d'une période du mouvement réel (comme c'était le cas pour le mouvement linéaire). Un mouvement fini réel d'un système à plusieurs degrés de liberté n'est pas non seulement en général périodique dans son ensemble, mais même la variation dans le temps de chaque coordonnée n'est pas non plus périodique (voir plus bas).

Il s'ensuit que toute fonction uniforme $F(p, q)$ [1] de l'état du système, lorsqu'on l'exprime au moyen des variables canoniques, est fonction périodique des variables angulaires, de période 2π pour chacune d'elles. On peut la développer en série multiple de Fourier

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} A_{l_1 l_2 \ldots l_s} e^{i(l_1 w_1 + \ldots + l_s w_s)} \tag{50,9}$$

(où les $l_1, l_2, \ldots l_s$ sont des nombres entiers). Portant ici les variables angulaires en fonction du temps, on trouve que la relation entre F et le temps est définie par une somme du type

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} A_{l_1 l_2 \ldots l_s} \exp\left\{ it \left(l_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} + \ldots + l_s \frac{\partial E}{\partial I_s} \right) \right\}. \tag{50,10}$$

Chaque terme de cette somme est une fonction périodique du temps de fréquence

$$l_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} + \ldots + l_s \frac{\partial E}{\partial I_s}. \tag{50,11}$$

Mais puisque ces fréquences ne sont pas en général des multiples entiers (ou des fractions rationnelles) de l'une d'entre elles, l'ensemble de la somme n'est pas une fonction strictement périodique. Cela concerne en particulier aussi bien les coordonnées q elles-mêmes que les impulsions p.

Ainsi, le mouvement d'un système n'est en général rigoureusement périodique ni globalement, ni par rapport à telle ou telle coordonnée. Cela signifie que si le système est passé par un certain état, il ne repassera pas par le même état au bout d'un intervalle de temps fini. On peut cependant affirmer qu'au bout d'un temps assez long, le système passera aussi près que l'on veut de cet état. C'est pourquoi un tel mouvement est appelé *quasi périodique*.

Dans certains cas particuliers, deux (ou plus) des fréquences fondamentales $\omega_i = \partial E / \partial I_i$ peuvent être commensurables (pour des valeurs arbitraires de I_i). Ce sont des cas de *dégénérescence*, et si les s fréquences sont commensurables, le mouvement du système est dit *complètement dégénéré*. Dans ce dernier cas, il est évident que le mouvement est rigoureusement périodique, et que par là même, les trajectoires de toutes les particules sont fermées.

---

[1] Les « coordonnées de rotation », c'est-à-dire les angles φ (voir note p. 214), ne sont pas liés de façon univoque à l'état du système, puisque des valeurs de φ différant d'un multiple entier de 2π correspondent à une même position du système. Par suite, s'il se trouve de tels angles parmi les coordonnées q, ils ne peuvent entrer dans la fonction $F(q, p)$ que sous la forme d'expressions telles que $\cos\varphi$ ou $\sin\varphi$, dont la correspondance avec l'état du système est univoque.

La dégénérescence entraîne tout d'abord une diminution du nombre des grandeurs indépendantes (I_i) dont dépend l'énergie du système. Soit ω_1 et ω_2 deux fréquences liées par la relation

$$n_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} = n_2 \frac{\partial E}{\partial I_2}, \tag{50,12}$$

où n_1 et n_2 sont des nombres entiers. Il en résulte que I_1 et I_2 n'entrent dans l'énergie que sous forme de la somme $n_2 I_1 + n_1 I_2$.

Une des particularités les plus importantes des mouvements dégénérés est l'augmentation du nombre de leurs intégrales premières uniformes par rapport au nombre de celles-ci dans le cas général d'un système non dégénéré (le nombre de degrés de liberté étant le même). Dans ce dernier cas, parmi les $(2s - 1)$ intégrales premières, s fonctions de l'état du système sont uniformes; leur choix est complètement déterminé, par exemple, par les s grandeurs I_i. Les autres intégrales peuvent être représentées par les différences

$$w_i \frac{\partial E}{\partial I_k} - w_k \frac{\partial E}{\partial I_i}. \tag{50,13}$$

Leur constance se déduit immédiatement de la formule (50,7), mais à cause de la non-uniformité des variables angulaires, elles ne sont pas des fonctions uniformes de l'état du système.

Il en va autrement dans les cas de dégénérescence. Ainsi, compte tenu de (50,12), l'intégrale

$$w_i n_k - w_k n_i \tag{50,14}$$

n'est pas uniforme, mais sa non-uniformité se réduit à l'addition d'un multiple entier quelconque de 2π. Par suite, il suffit de prendre une fonction trigonométrique de cette grandeur pour obtenir une nouvelle intégrale première, uniforme.

Le mouvement dans un champ $U = -\alpha/r$ (voir problème à la fin de ce paragraphe) constitue un exemple de mouvement dégénéré. C'est ce fait qui aboutit à l'apparition, outre les deux intégrales uniformes habituelles [1] — moment M et énergie E — propres au mouvement dans un champ central quelconque, de la nouvelle intégrale première uniforme (15,17), spécifique du champ donné.

Notons aussi que l'apparition d'intégrales uniformes supplémentaires conduit, à son tour, à une autre propriété des mouvements dégénérés: ils admettent une séparation complète des varia-

[1] Le mouvement est considéré déjà comme plan.

bles pour plusieurs choix des coordonnées, et non pour un seul choix déterminé [1]. En effet, dans les coordonnées pour lesquelles la séparation des variables a lieu, les I_i sont des intégrales premières uniformes. Mais lorsqu'il y a dégénérescence, le nombre des intégrales uniformes est plus grand que s et, par suite, le choix de celles que nous voulons prendre pour grandeurs I_i cesse d'être univoque.

A titre d'exemple, reprenons le mouvement de Kepler, pour lequel les variables se séparent aussi bien en coordonnées sphériques que paraboliques.

Nous avons montré au paragraphe précédent que pour un mouvement fini à une dimension, la variable d'action est un invariant adiabatique. Cette affirmation reste valable pour un système à plusieurs degrés de liberté. Donnons-en ici la démonstration générale.

Soit de nouveau $\lambda\ (t)$ un paramètre du système dont la variation est lente [2]. Dans la transformation canonique qui fait passer des variables p, q aux variables I, w, c'est, comme nous le savons, l'action $S_0\ (q,\ I)$ qui est fonction génératrice. Elle dépend de λ comme paramètre, et si ce dernier dépend du temps elle sera fonction explicite du temps: $S_0\ (q,\ I\ ;\ \lambda\ (t))$. Dans ce cas, la nouvelle fonction de Hamilton H' ne coïncidera plus avec l'ancienne, c'est-à-dire l'énergie $E\ (I)$, et, d'après les formules générales (45,8) de transformation canonique, on aura :

$$H' = E\,(I) + \frac{\partial S_0}{\partial t} = E\,(I) + \Lambda\dot{\lambda},$$

où l'on a posé

$$\Lambda = \left(\frac{\partial S_0}{\partial \lambda}\right)_I .$$

Les équations de Hamilton donnent maintenant :

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial H'}{\partial w_i} = -\frac{\partial \Lambda}{\partial w_i}\,\dot{\lambda}. \tag{50,15}$$

Prenons la moyenne de cette égalité dans un intervalle de temps grand par rapport aux périodes du système, mais petit par rapport au temps que mettrait le paramètre λ à varier de façon notable. De ce fait, on peut ne pas surligner $\dot{\lambda}$, et en prenant la moyenne de $\partial\Lambda/\partial w_i$, on peut considérer que le mouvement du système s'effectue à λ constant et possède par suite les propriétés des mouvements quasi périodiques indiquées ci-dessus.

---

[1] Nous faisons abstractions ici des changements de coordonnées triviaux tels que $q_1' = q_1'\ (q_1)$, $q_2' = q_2'\ (q_1)$.

[2] Pour simplifier les formules nous supposons qu'il n'y a qu'un seul paramètre, mais la démonstration reste entièrement valable quel qu'en soit le nombre.

L'action S_0 est une fonction multiforme des coordonnées; lorsque celles-ci reprennent leur valeur initiale, des multiples entiers de $2\pi I_i$ s'ajoutent à S_0. Mais la dérivée $\Lambda = (\partial S_0/\partial\lambda)_I$ est une fonction uniforme, puisque la dérivation est effectuée à I_i constants et que par suite, les accroissements qui s'ajoutent à S_0 disparaissent. Par conséquent Λ, exprimée en fonction des variables angulaires w_i, est une fonction périodique. Or, la valeur moyenne des dérivées $\partial\Lambda/\partial w_i$ d'une telle fonction est nulle, de sorte que, compte tenu de (50,15), on a:

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} = -\overline{\left(\frac{\partial \Lambda_i}{\partial w_i}\right)_I \dot{\lambda}} = 0,$$

ce qui démontre l'invariance adiabatique des I_i.

Concluons par quelques remarques sur les propriétés du mouvement fini de systèmes fermés à s degrés de liberté dans le cas le plus général, ne supposant pas que les variables se séparent dans l'équation correspondante de Hamilton-Jacobi.

La propriété fondamentale des systèmes à variables séparées est l'uniformité des intégrales premières I_i, dont le nombre est égal au nombre de degrés de liberté. Mais dans le cas général des systèmes à variables non séparées, le choix des intégrales premières uniformes se limite à celles dont la constance exprime les propriétés d'homogénéité et d'isotropie de l'espace et du temps, c'est-à-dire aux lois de conservation de l'énergie, de l'impulsion et du moment.

La trajectoire dans l'espace des phases d'un système passe par les régions de l'espace des phases déterminées par les valeurs constantes données des intégrales premières uniformes. Pour un système à variables séparées ayant s intégrales uniformes, ces conditions définissent une variété (hypersurface) à s dimensions dans l'espace des phases. Au bout d'un temps assez long, la trajectoire du système remplira cette surface de façon aussi dense que l'on veut.

Pour un système à variables non séparées, ayant un nombre moindre d'intégrales uniformes (pour le même nombre de degrés de liberté), la trajectoire des phases remplira dans l'espace des phases (totalement ou en partie) des régions (variétés) à un nombre de dimensions plus élevé.

Indiquons pour finir que si la fonction de Hamilton d'un système ne diffère que par des termes petits d'une fonction admettant la séparation des variables, les propriétés du mouvement seront infiniment proches des propriétés des mouvements quasi périodiques; les différences seront des infiniment petits d'un ordre beaucoup plus élevé que celui des infiniment petits supplémentaires dans la fonction de Hamilton.

Problème

Calculer les variables d'action pour un mouvement elliptique dans un champ $U=-\alpha/r$.

Solution. En coordonnées polaires r, φ dans le plan du mouvement on a :

$$I_{\varphi}=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} p_{\varphi}\, d\varphi=M,$$

$$I_{r}=\frac{2}{2\pi}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^{2}}{r^{2}}}\, dr=-M+\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\,.$$

D'où l'énergie exprimée en fonction des variables d'action

$$E=-\frac{m\alpha^{2}}{2\left(I_{r}+I_{\varphi}\right)^{2}}\,.$$

Elle ne dépend que de la somme I_r+I_φ, ce qui signifie que le mouvement est dégénéré : les deux fréquences principales (par rapport à φ et r) coïncident.

Les paramètres p et e de l'orbite (voir (15,4)) s'expriment en fonction de I_r et I_φ par

$$p=\frac{I_{\varphi}^{2}}{m\alpha}\,,\quad e^{2}=1-\left(\frac{I_{\varphi}}{I_{\varphi}+I_{r}}\right)^{2}.$$

Par suite de l'invariance adiabatique de I_r et I_φ l'excentricité de l'orbite reste inchangée lorsque le coefficient ou la masse m varie lentement, et ses dimensions varient de façon inversement proportionnelle à m et α.

INDEX

TABLE DES MATIÈRES